Chapitre 4.
Marchandage bilatéral ou jeu de partage

1. Un jeu séquentiel à deux étapes

Deux joueurs doivent se partager 1 dollar. Leur facteur d'actualisation (par jour) est δ, avec $0 < \delta < 1$. Le jeu se déroule ainsi.

- Le premier jour, le joueur 1 propose le partage (x_1, y_1), avec $x_1, y_1 \geq 0$ et $x_1 + y_1 = 1$. Le joueur 2 accepte ou refuse la proposition. S'il l'accepte, la proposition du joueur 1 est appliquée et le jeu s'arrête. S'il refuse, on ne fait rien jusqu'au second jour.
- Le second jour le joueur 2 propose le partage (x_2, y_2). Le joueur 1 accepte ou refuse la proposition. S'il l'accepte la proposition du joueur 2 est appliquée. S'il refuse, le dollar est retiré et les joueurs ne reçoivent rien (leurs gains sont alors $(0,0)$).

L'astuce du problème est que les deux joueurs effectuent tous leurs calculs le premier jour. Ils évaluent donc un gain perçu le second jour en le multipliant par leur taux d'actualisation δ.

Raisonnons par *backward induction.*

- Le second jour, le joueur 2 propose $(0,1)$ et le joueur 1 accepte la proposition (si vous n'êtes pas convaincu, remplacez $(0,1)$ par $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ et infiniment petit).
- Le joueur 1 sait que si son offre du premier jour est refusée, le joueur 2 recevra 1 le second jour, ce qui équivaut à δ le premier jour. Donc, le joueur 1 sait que le joueur 2 refusera toute proposition lui donnant moins que δ. Ainsi la proposition de partage qui est la plus avantageuse pour lui est $(1-\delta, \delta)$.

Finalement, le premier jour, le joueur 1 fait la proposition de partage $(1-\delta, \delta)$, et le joueur 2 l'accepte. Le jeu ne dure donc qu'une journée. Les éléments de la stratégie de chacun des joueurs qui concernent le deuxième jour sont *hors équilibre*, c'est-à-dire ne sont pas exécutés. Mais ils sont parfaitement perçus dans le raisonnement qu'effectue chacun des deux joueurs.

2. Un jeu séquentiel à 2xn étapes

Le jeu est identique au précédent, sauf qu'il s'arrête au plus tard au terme de la 2xnème étape, avec $n > 1$. Dans les étapes impaires, le joueur 1 fait une proposition de partage et le joueur 2 l'accepte ou la refuse. Dans les étapes paires, le joueur 2 fait une proposition de partage et le joueur 1 l'accepte ou le refuse.

Je vais d'abords donner la solution de ce jeu. Puis je prouverai que cette solution vérifie le critère de *backward induction.*

2.1. Solution du jeu

Soit k un nombre entier avec $0 \leq k \leq n-1$.

- Le jour $t = 2n-2k$, le joueur 2 fait l'offre
  $$(x_t, y_t) = \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, 1-\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}\right) = \left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}, \frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}\right) \qquad (1)$$
  Le joueur 1 accepte la proposition.
- Le jour $t = 2n-2k-1$, le joueur 1 fait l'offre
  $$(x_t, y_t) = \left(1-\frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right) = \left(\frac{1-\delta^{2k+2}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right) \qquad (2)$$
  Le joueur 2 accepte la proposition.
- Les seules décisions qui ne sont pas hors équilibre sont prises le jour 1. On a alors $1 = 2n-2k-1$, d'où $k = n-1$. On déduit alors de l'équation (2) que le joueur 1 propose le partage
  $$(x_1, y_1) = \left(\frac{1-\delta^{2n}}{1+\delta}, \frac{\delta\left(1+\delta^{2n-1}\right)}{1+\delta}\right) \qquad (3)$$
  Le joueur 2 accepte la proposition.

2.2. Démonstration, par itérations et en appliquant le critère de backward induction

a) Démontrons que la solution est correcte pour $k = 0$.

Le jeu n'a plus que deux étapes au plus avant de s'achever, et nous sommes dans la même configuration que dans la section 1. On en déduit que dans l'avant-dernière période du jeu, le joueur 1 proposera le partage $(1-\delta,\delta)$, et dans la dernière période du jeu le joueur 2 proposera le partage $(0,1)$. Ces deux choix sont conformes aux équations (2) et (1).

b) Supposons que les équations (1) et (2) soient correctes pour $k-1$ et vérifions qu'elles le soient aussi pour k.

- La formule (2) établit qu'à la journée $t=2n-2(k-1)-1$, le joueur 1 fait la proposition de partage $(x_t,y_t)=\left(\frac{1-\delta^{2(k-1)+2}}{1+\delta},\frac{\delta\left(1+\delta^{2(k-1)+1}\right)}{1+\delta}\right)=\left(\frac{1-\delta^{2k}}{1+\delta},\frac{\delta\left(1+\delta^{2k-1}\right)}{1+\delta}\right)$. Cette proposition est acceptée par le joueur 2.
- A la journée précédente $t=2n-2k$, le joueur 2 fera une proposition que le joueur 1 pourra accepter ou refuser. Le joueur 1 acceptera une proposition si elle lui assure au moins le gain qu'il aurait en la refusant, actualisé par δ, soit $\delta\frac{1-\delta^{2k}}{1+\delta}$. Donc le joueur 2 fera la proposition de partage la plus avantageuse pour lui parmi celles acceptables par le joueur 1, soit $(x_t,y_t)=\left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta},1-\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta}\right)=\left(\frac{\delta\left(1-\delta^{2k}\right)}{1+\delta},\frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}\right)$. On retrouve bien l'équation (1).
- A la journée encore précédente $t=2n-2k-1$, le joueur 1 fera une proposition que le joueur 2 pourra accepter ou refuser. Le joueur 2 acceptera une proposition si elle lui assure au moins le gain qu'il aurait en la refusant, actualisé par δ, soit $\delta\frac{1+\delta^{2k+1}}{1+\delta}$. Donc, le joueur 1 fera la proposition de partage la plus avantageuse pour lui parmi celles acceptables par le joueur 2, soit
$$(x_t,y_t)=\left(1-\frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta},\frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right)=\left(\frac{1-\delta^{2k+2}}{1+\delta},\frac{\delta\left(1+\delta^{2k+1}\right)}{1+\delta}\right).$$
On retrouve bien l'équation (2).

3. Un jeu séquentiel à une infinité d'étapes

Nous pouvons reprendre le bilan du paragraphe précédent en faisant tendre le nombre d'étapes vers l'infini. Alors :

- Dans une journée t impaire, le joueur 1 propose le partage $(x_t, y_t) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$. Le joueur 2 accepte la proposition.
- Dans une journée t paire, le joueur 2 propose le partage $(x_t, y_t) = \left(\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right)$. Le joueur 1 accepte la proposition.
- Mais en fait toutes ces décisions sont hors équilibre. La seule décision qui est exécutée est que dans la première journée, le joueur 1 propose le partage $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$. Le joueur 2 accepte la proposition.

Mon extension d'un nombre fini à un nombre infini d'étapes a été faite par un simple passage mathématique à la limite. Elle mérite une justification plus conforme à la théorie des jeux.

En fait j'ai implicitement appliqué un nouveau critère, le *single-deviation principle* qui revient à introduire un genre de continuité à l'infini. Je définis maintenant ce critère.

Considérons un jeu à information parfaite et à une infinité d'étapes, notées $1,2,3,...,j,...$ Un profil stratégique : $s = (s_1, s_2, ..., s_j, ...)$ est une solution du jeu si, pour tout j , le profil stratégique $(s_1, s_2, ..., s_j)$ est une solution *backward induction* du jeu tronqué à la fin de l'étape j (avec à la fin de cette étape les gains attachés au profil stratégique s). On étend aisément cette définition à des jeux à information imparfaite en remplaçant solution *backward induction* par équilibre *subgame perfect.* Soyons un peu plus précis et indiquons comment on vérifie que le profil stratégique s satisfait au *single-deviation principle*.

A chaque ensemble d'information où un joueur i doit prendre une décision :

- On fixe la stratégie des autres joueurs conformément au profil s ;
- On fixe les choix du joueur i dans les autres ensembles d'information le concernant, conformément au profil s ;

- Alors le joueur i ne peut pas améliorer son paiement conditionnel à l'ensemble d'information en déviant de sa stratégie conforme au profil s, juste dans cet ensemble d'information.

Vérifions maintenant que la solution qu'a donnée notre passage à la limite vérifie le *single-deviation principle.*

- A la date t paire, le joueur 1 propose et le joueur 2 accepte ou refuse.
- Si le joueur 2 refuse, il recevra à la date suivante le gain $1/(1+\delta)$, dont la valeur actualisée à la date t est $\delta/(1+\delta)$.
- Le joueur 2 refusera donc à la date t toute proposition qui lui attribue une part inférieure à $\delta/(1+\delta)$. Donc le joueur 1 proposera de lui attribuer $\delta/(1+\delta)$, et s'attribuera à lui-même $1/(1+\delta)$.

QED

Faisons un petit bilan. Le joueur 1 est le premier à jouer.

- Si le jeu a 2 étapes, le partage est $(1-\delta,\delta)$.
- Si le jeu est en $2*n$ étapes, le partage est $\left(\frac{1-\delta^{2n}}{1+\delta},\frac{\delta\left(1+\delta^{2n-1}\right)}{1+\delta}\right)$.
- Si le jeu est à une infinité d'étapes, le partage est $\left(\frac{1}{1+\delta},\frac{\delta}{1+\delta}\right)$.

Le facteur d'actualisation δ est plus petit que 1. Mais avec une base de temps journalière il est très proche de 1. Donc, si la durée du jeu ne peut pas dépasser 2 jours, la quasi-totalité du dollar à partager est donnée au joueur 2 et non au joueur 1. La part du dollar attribuée au joueur 2 diminue avec la durée maximale du jeu. Quand celle-ci est infinie, le joueur 1 reçoit un tout petit peu plus que 50 cents et le joueur 2 reçoit un tout petit peu moins que 50 cents. Il existe une valeur de n telle que si la durée du jeu est inférieure ou égale à 2xn jours, le joueur 1 reçoit moins que le joueur 2, et si la durée du jeu est supérieure à 2xn jours, le joueur 1 reçoit (un tout petit peu) plus que le joueur 2.

4. Extensions

Il existe un très grand nombre d'extensions de ce jeu de partage. Limitons-nous au cas où le nombre d'étapes est infini et donnons deux exemples.

a) Supposons que le taux d'escompte $1/\delta - 1$ soit trois fois plus élevé pour le joueur 2 que pour le joueur 1. Alors on peut montrer que le joueur 1 recevra sensiblement trois fois plus que le joueur 2, soit (sensiblement) 75 cents contre 25 cents.
b) Supposons que le joueur 1 mette un jour pour faire sa contre-proposition, alors que le joueur 2 mette trois jours. Alors on peut montrer que le joueur 1 recevra sensiblement trois fois plus que le joueur 2 , soit (sensiblement) 75 cents contre 25 cents.

Ainsi, l'impatience et la lenteur sont sévèrement punies.

5. Un retour aux jeux répétés un nombre infini de fois

Maintenant que j'ai introduit le *single deviation principle* dans un problème assez simple, je peux revenir à la première section du chapitre 3 et y apporter plus de rigueur. Une stratégie du joueur i est une suite infinie $s_i = (a_0, a_1, ..., a_t, ...)$ de fonctions a_t donnant la stratégie du joueur i dans le *stage game* de la $t+1$*ème* partie, en fonction des actions qui avaient été prises par chaque joueur dans les parties antérieures du *stage game*[1].

Supposons qu'il y ait n joueurs. Nous voulons vérifier si le profil stratégique $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ est un équilibre *subgame perfect* du jeu répété.

Considérons un ensemble d'information où le joueur i doit prendre une décision, et notons par a^* celle incluse dans le profil stratégique s que nous évaluons. Supposons que cet ensemble d'information soit atteint (ce qui revient à dire que nous considérons aussi les ensembles

[1] La stratégie du *stage game* de la $t+1$*ème* partie décrit donc la décision prévue être jouée dans cette partie pour chaque suite de décisions possibles du joueur et de ses partenaires prises dans les t parties précédentes (ce qu'on appelle l'histoire du jeu jusqu'à la t*ème* partie). La liste des décisions qui constitue une stratégie du *stage game* augmente donc au cours du temps et tend vers l'infini (et n'oubliez pas qu'en plus la stratégie du *super game* est la suite des stratégies de chaque *stage game* !!). Cela rend très complexe l'analyse des jeux répétés. Le problème de la dépendance de l'état présent relativement à toute l'histoire, est familier en finances : le prix de l'action d'une entreprise dépend de toute l'histoire de cette entreprise, mais aussi de ses concurrents, etc. L'astuce des financiers est de dire qu'une toute petite partie de l'histoire est *relevant* pour le problème qui les intéresse, et que celle-ci peut être mesurée par un petit nombre de variables d'état. La théorie des jeux exploite cette idée dans le concept *d'équilibre de Markov parfait.*

d'information hors équilibre), que chaque joueur $j \neq i$ conserve sa stratégie s_j dans ce qui reste du jeu (la partie du jeu située à partir de l'ensemble d'information considéré), et que le joueur i conserve sa stratégie s_i dans ce qui reste du jeu, à l'exclusion de l'ensemble d'information considéré. Alors, on vérifie que le joueur i n'a pas intérêt à *dévier* dans cet ensemble d'information, c'est-à-dire n'a pas intérêt à y jouer $a' \neq a*$ au lieu de $a*$.

Le *single deviation principle* est que s'il n'existe aucun ensemble d'information où le joueur qu'y s'y rapporte ait intérêt à dévier au sens ci-dessus, alors le profil stratégique évalué est un équilibre *subgame perfect* du jeu.