Chapitre 3.
Jeux répétés : coopération et réputation

1. Les jeux répétés peuvent conduire à la coopération : le folk theorem

J'avais présenté dans le chapitre 2 le dilemme du prisonnier, qui est un jeu dont la représentation normale est :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	3 3	0 4
	s_2	4 0	1 1

Ce jeu a un seul équilibre de Nash s_2,t_2. A cet équilibre le gain de chacun des deux joueurs est strictement inférieur à celui qu'il aurait avec le profil stratégique s_1,t_1. L'équilibre de Nash de cet exemple est donc dominé, ou non optimum au sens de Pareto.

J'avais considéré dans le chapitre 2 que ce jeu était joué une seule fois. Supposons que le jeu soit joué un *nombre fini* de fois. On dit alors que le jeu original (le dilemme du prisonnier) est un *stage game*. Celui-ci a évidemment l'équilibre de Nash unique rappelé ci-dessus. On suppose qu'à chaque répétition du *stage game* les joueurs se rappellent les décisions que chacun d'entre eux avait prises dans les parties antérieures. On suppose aussi que le gain de chaque joueur est égal à la somme de ses gains dans chacun des *stage games* joués. Alors, on peut aisément démontrer par backward induction que le jeu répété a un équilibre *subgame perfect unique* dans lequel chaque joueur joue dans chaque *stage game* sa stratégie de Nash.

Ce résultat reste valide pour tout jeu constitué d'un stage game répété un nombre *fini* de fois, si les actions prises par chaque joueur sont observables par tous, si leur mémoire est parfaite et si le stage game a un équilibre de Nash *unique*. Alors, l'équilibre *subgame perfect* du jeu répété est unique et consiste à ce que soit joué à chaque stage l'équilibre de Nash du *stage game*.

Je vais supposer maintenant que le *stage game* est joué une infinité de fois. Les théoriciens des jeux appellent le jeu complet un *supergame* ou jeu répété un nombre infini de fois. Les parties successives sont indicées par la variable $t = 1,2,3,....$. Le gain du joueur 1 à la partie t est noté $u_1(t)$. Avant de commencer la première partie le joueur 1 anticipe un gain sur l'ensemble des parties égal à $U_1(1) = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} u_1(t)$, avec $0 < \alpha < 1$. α est le facteur d'escompte du joueur[1]. On définit des notations similaires pour le joueur 2. On a alors un résultat beaucoup plus intéressant que celui que nous avions obtenu quand le *stage game* était répété un nombre fini de fois.

Le jeu répété a un nombre considérable d'équilibres de Nash. Par exemple, répéter le profil stratégique (s_2, t_2), c'est-à-dire l'équilibre de Nash du *stage game*, dans chaque partie, est un équilibre de Nash du *supergame*. Je vais maintenant montrer que le profil stratégique suivant est aussi un équilibre de Nash du *supergame* :

- Le joueur 1 joue s_1 à la première partie. Il fera le même choix dans les parties suivantes si le joueur 2 a toujours joué t_1 dans les parties antérieures. Si le joueur 2 a joué t_2 une fois ou davantage dans les parties antérieures le joueur 1 jouera désormais toujours s_2.
- Le joueur 2 joue t_1 à la première partie. Il fera le même choix dans les parties suivantes si le joueur 1 a toujours joué s_1 dans les parties antérieures. Si le joueur 1 a joué s_2 une fois ou davantage dans les parties antérieures le joueur 2 jouera désormais toujours t_2.

Démontrons qu'il s'agit bien d'un équilibre de Nash. Supposons que le joueur 2 anticipe correctement la stratégie du joueur 1, qu'il se prépare à jouer pour une nouvelle partie, et qu'il a toujours joué t_1 dans le passé. Le joueur 2 calcule que s'il décide de jouer encore une fois t_1 avec la résolution de reproduire cette décision éternellement, alors son gain espéré sera $3/(1-\alpha)$. S'il décide de jouer t_2, son gain de la partie sera 4, mais son gain de toutes les parties ultérieures sera 1. Donc son gain espéré sera $4 + \alpha/(1-\alpha)$. Il aura donc intérêt à faire le premier choix si

[1] $1/\alpha - 1$ est le taux d'escompte du joueur.

$3/(1-\alpha) > 4 + \alpha/(1-\alpha)$, c'est-à-dire si $\alpha > 1/3$. Donc, le profil stratégique ci-dessus sera un équilibre de Nash si les joueurs ne sont pas trop impatients. On remarque que les deux joueurs collaborent toujours et que la menace de chacun ne sera jamais exécutée : elle est hors équilibre, et on n'a pas à examiner s'il est de l'intérêt du joueur de la mettre en œuvre s'il avait à le faire. On examinera cependant cette question quand on passera de l'équilibre de Nash à l'équilibre de Nash *subgame perfect.*

Il existe beaucoup d'autres équilibres de Nash dans le jeu, par exemple celui défini par le profil stratégique suivant :

- Le joueur 1 joue s_1 une fois sur deux et s_2 une fois sur deux si le joueur 2 a toujours joué t_1 dans les parties antérieures. Si le joueur 2 a joué t_2 une fois ou davantage dans les parties antérieures le joueur 1 jouera désormais toujours s_2.
- Le joueur 2 joue t_1 si le joueur 1 a joué s_1 une fois sur deux et s_2 une fois sur deux dans les parties antérieures. Si le joueur 1 n'a pas respecté cette politique une fois ou davantage dans les parties antérieures le joueur 2 jouera désormais toujours t_2.

Cet équilibre de Nash est plus avantageux que le précédent pour le joueur 1 qui gagne 4 une fois sur deux et 3 une fois sur deux. Il est moins avantageux pour le joueur 2 qui gagne 3 une fois sur deux et 0 une fois sur deux. Cependant, ce joueur est dans une situation plus avantageuse que celle qu'il aurait avec l'équilibre de Nash du *stae game* (un gain de 1 dans chaque partie).

Généralisons les résultats précédents. Un jeu répété un nombre infini de fois consiste en une suite infinie de répétitions d'un jeu d'une période, appelé *stage game*, où les joueurs agissent simultanément. Continuons à supposer qu'il n'y ait que deux joueurs, 1 et 2. Dans le *stage game*, le joueur *i* , *i*=1,2, choisit l'action $q_i \in S_i$. Son gain est $u_i(q_i, q_j)$, $j \neq i$. L'équilibre de Nash du *stage game*, qu'on suppose exister et être unique, est $q^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Dans le jeu répété un nombre infini de fois, une stratégie du joueur *i*, s_i, est une suite de fonctions $s_{it}(H_{t-1})$, $t = 1,..,\infty$, reliant l'histoire des actions précédentes des deux joueurs, H_{t-1}, au choix du joueur *i* dans la période *t*. Evidemment la stratégie doit être définie pour chaque histoire possible, pas seulement pour celles qui seront observées *ex post*. Le gain actualisé du joueur i est $U_i = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} u_i \left[s_{1t}\left(H_{t-1}\right), s_{2t}\left(H_{t-1}\right) \right]$. Son gain moyen par période est $\overline{U_i} = (1-\alpha) U_i$.

On dit qu'un profil de gains $\left(u_1, u_2\right)$ est atteignable dans le *stage game* s'il existe un profil d'actions, éventuellement mixtes, $\left(q_1, q_2\right)$, conduisant à ce profil de gains. Je peux maintenant énoncer le *folk theorem*.

Pour tout profil de gain atteignable du *stage game*, et dominant au sens de Pareto l'équilibre de Nash de ce jeu : $u_i\left(q_1, q_2\right) \geq u_i\left(q_1 *, q_2 *\right)$, i=1,2, il existe $\underline{\alpha} < 1$, tel que pour tout facteur d'escompte $\alpha > \underline{\alpha}$, $u_i\left(q_1, q_2\right)$, i=1,2, est le gain moyen d'un équilibre de Nash du *supergame*.

Il existe donc une double infinité d'équilibres de Nash, caractérisée d'abord par une infinité de profils de gains, et ensuite, par une infinité de sanctions. Par exemple, une menace de sanction ou punition dans le dilemme du prisonnier, peut-être de jouer s_2 éternellement, une autre de le jouer dix fois, une autre de le jouer une fois (*tit-for-tat*), etc.

Le développement abstrait précédent est une conceptualisation convaincante de beaucoup de remarques de bon sens que l'on peut faire sur l'histoire qui sous-tend le dilemme des prisonniers. Par exemple, on peut interpréter l'équilibre de Nash symétrique où aucun des deux prisonniers n'avoue jamais comme formalisant le fait que chacun d'entre eux a une réputation d'homme d'honneur. Mais cette réputation ne trouve pas uniquement sa source dans le sens moral des deux délinquants. Ils ont parfaitement conscience que s'ils la trahissaient une fois ils échangeraient un gain immédiat contre une perte perpétuelle de réputation et des gains que celle-ci entraîne. La différence entre la perte (actualisée) et le gain représente le prix de la réputation d'homme d'honneur. Ce prix est positif tant que les joueurs n'escomptent pas trop fortement le futur.

L'équilibre de Nash non symétrique représente la situation du parrain et du demi-sel. Le parrain brime le demi-sel, qui accepte les brimades (être donné à la police une fois sur deux). Mais la brimade ne doit pas être telle que le demi-sel trouverait plus avantageux d'adopter la stratégie de l'équilibre de Nash du *stage game*.

Je vais maintenant examiner le problème de la crédibilité des composantes hors équilibre des stratégies, c'est-à-dire le problème de la *subgame perfection*. Je considère le jeu répété dont la forme normale est :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	5 5	-1 -2
	s_2	6 -1	0 -3

Un équilibre de Nash de ce jeu est[2] :

- Le joueur 1 joue toujours s_1.
- Le joueur 2 joue t_1 si le joueur 1 a toujours joué s_1 auparavant. Il joue éternellement t_2 si le joueur 1 a joué une fois ou davantage s_2 auparavant.

La menace incluse dans cet équilibre n'est pas crédible. Si le joueur 2 l'exécutait en jouant t_2, il opterait pour une stratégie qui est strictement dominée par t_1. Il a donc intérêt à ne pas mettre en œuvre sa punition. En fait, nous exigeons pour qu'une menace soit crédible qu'elle soit telle que le profil stratégique dont elle fait partie soit un équilibre de Nash du *supergame* (commençant au *stage* où la menace serait exécutée). Les équilibres de Nash *subgame perfect* sont lourds à définir, et la preuve de leur propriété est pénible à établir. Un exemple d'un tel équilibre dans l'exemple est :

Les joueurs jouent (s_1, t_1) tant qu'aucun d'eux ne dévie. Si l'un d'entre eux dévie, ils jouent (s_2, t_2) pour un coup. S'ils exécutent effectivement cette décision, alors ils reviennent ensuite à la stratégie (s_1, t_1) tant qu'aucun ne dévie. Si l'un ou les deux n'exécutent pas la décision (s_2, t_2) ils jouent encore (s_2, t_2) et cela jusqu'à ce que tous les deux exécutent leur part de ce profil stratégique.

[2] L'équilibre de Nash du *stage game* est unique et est (s_2, t_1).

Ensuite ils reviennent à (s_1, t_1). La démonstration a besoin de l'hypothèse $\alpha > 1/4$, c'est-à-dire les joueurs ne doivent pas être trop impatients.

La *subgame perfection* réduit le nombre d'équilibre de Nash, mais nous avons encore le *folk theorem*, avec une double infinité d'équilibres[3].

Les économistes ont été très excités par les résultats qui précèdent. En effet, ils permettent d'établir que la coopération est possible entre joueurs qui jouent d'une façon essentiellement non coopérative. Dans un jeu coopératif, les joueurs négocient un compromis, et ensuite sont obligés de l'exécuter, par exemple parce qu'ils ont signé un contrat et qu'il existe un système légal sanctionnant ceux qui n'exécutent pas leur part du contrat. Dans un jeu non coopératif, les joueurs peuvent discuter, prendre des engagements, mais il n'y a aucun système forçant les joueurs à exécuter leurs engagements (donc la discussion n'est même plus vraiment utile). Or, cette section montre que dans un jeu non coopératif (donc en l'absence de système d'*enforcement* des contrats), les joueurs peuvent se comporter de façon coopérative, parce qu'ils sont sensibles à leur réputation et aux sanctions postérieures éventuelles qui s'appliquent à ceux qui dévient.

Cette satisfaction des économistes est cependant un peu excessive. D'abord nous obtenons une multitude d'équilibres de Nash, éventuellement *subgame perfect*. Rien ne nous dit que les différents joueurs anticiperont le même équilibre de Nash quand ils calculeront leurs stratégies. Il est donc possible que le résultat du jeu ne soit pas un équilibre de Nash. De plus, même si un mécanisme, qu'il faudrait définir, coordonnait les anticipations des joueurs sur un même équilibre de Nash, rien ne dit ce que celui-ci serait optimum au sens de Pareto. On est donc en présence d'une théorie de l'équilibre qui est très incomplète. Les économistes ont souvent tendance à résoudre l'indétermination par des règles *ad hoc* qui sont loin d'être convaincantes.

Un autre problème avec les développements de cette section, est qu'il y a une discontinuité entre répéter un jeu un grand nombre de fois et le répéter une infinité de fois. Supposez que le dilemme du prisonnier soit joué 100 fois. A la 100$^{\text{ème}}$ partie, les deux joueurs trahissent, puisqu'il n'y aura plus de partie ultérieure permettant de châtier les traîtres. A la 99$^{\text{ème}}$ partie, chaque joueur anticipe que son partenaire trahira à la partie suivante. Il n'a donc aucune incitation à ne pas trahir à cette partie. A la 98$^{\text{ème}}$ partie, les joueurs anticipent la trahison générale pour les parties 99 et 100. Donc,

[3] Les exemples d'équilibres de Nash que j'avais donnés pour le dilemme du prisonnier répété un nombre infini de fois, sont *subgame perfect.*

ils n'ont aucune raison de ne pas trahir dans la partie en cours. Etc. Finalement, dès la première partie chaque joueur avoue à la police, et il y a un seul équilibre de Nash, qui est celui du chapitre 2 répété pour chaque *stage game.*

Il y a une similarité entre ce que je viens de dire et le jeu de la fin de la section 2 du chapitre 2, que nous avions résolu par *backward induction.* Chaque fois, on a obtenu un résultat bizarre. Mon interprétation est qu'un jeu qui est joué un grand nombre de fois, est perçu par les joueurs comme étant joué un nombre infini de fois, sauf quand ils approchent de la fin du jeu. Donc, dans le dilemme du prisonnier joué 100 fois, on peut penser qu'aucun des gangsters ne trahira lors des 95 premières arrestations. Ensuite, tout est possible, mais l'un des gangsters trahira avant la fin du *supergame.*

Cela me rappelle un élément des *Travailleurs de la mer* de Victor Hugo. Le vieux capitaine avait mené une vie très intègre, pour établir sa réputation, et se voir confier, à la fin de sa vie le commandement d'un bateau rempli d'or. Il fait couler le bateau dans un endroit peu profond, évacue l'équipage, déclare aux armateurs que le bateau a coulé dans un endroit profond et est irrécupérable, enfin il se prépare à récupérer l'or à son profit.

Dans la logique de la *backward induction* les armateurs n'auraient jamais dû confier un bateau chargé d'or à un capitaine effectuant son dernier voyage, car il était évident qu'il allait chercher à voler cet or. Le capitaine, n'aurait eu alors aucune raison de mener une vie intègre… Maintenant, qui a tort du principe de *backward induction* ou de Victor Hugo ?

2. Jeux observables avec bruit

Dans la section précédente on supposait que chaque joueur savait ce qu'avait joué son adversaire dans les parties précédentes. Cette hypothèse n'est pas toujours raisonnable. Reprenons le dilemme du prisonnier et ajoutons à chacun des huit gains figurant dans la matrice des gains, une variable aléatoire d'espérance nulle et d'écart type égal à 5 (les variables aléatoires sont indépendantes entre elles, et indépendantes entre les différentes parties). Ces variables aléatoires sont appelées *bruit.* Supposons que chaque joueur observe ses gains et ceux de son adversaire, mais n'observe pas ce que joue son adversaire. Alors, un mauvais gain, du joueur 1 par exemple, peut résulter de la non coopération du joueur 2 (il joue t_2, c'est-à-dire il avoue à la police, tout en prétendant avoir joué

t_1), ou bien de la malchance (le joueur 2 a bien joué t_1, mais la composante aléatoire du gain du joueur 1 a pris une valeur défavorable).

Ainsi, le joueur 1 est confronté à un gros problème. Il peut supposer que le joueur 2 joue toujours coopérativement, c'est-à-dire joue t_1, et que les mauvais gains qu'il a de temps en temps sont dus à la malchance. Dans ce cas il ne punira jamais le joueur 2 (en jouant s_2 pour un certain nombre de parties). Mais alors le joueur 2 sera incité à jouer t_2 de temps en temps ou même toujours. Il faut donc que le joueur 1 punisse le joueur 2 chaque fois qu'il obtient un mauvais résultat. La punition doit être suffisamment sévère et durable pour inciter le joueur 2 à toujours coopérer, mais pas trop pour ne pas ruiner les bénéfices de la coopération (la punition ne peut pas être de jouer s_2 éternellement). Il y a donc un degré optimal de punition.

Ainsi, chacun des deux joueurs joue de façon coopérative (c'est-à-dire joue s_1 ou t_1), sauf quand il punit son partenaire à la suite d'un mauvais résultat. Mais alors le mauvais résultat n'est jamais dû à une déviation du partenaire, mais à la malchance. On punit le joueur 2 pour un mauvais résultat du joueur 1, alors que le joueur 2 est innocent dans l'obtention de ce résultat. Mais si le joueur 2 n'était pas puni pour une faute qu'il n'a pas commise, il n'aurait plus aucune incitation à ne pas dévier et à jouer de façon coopérative.

Nagisa Oshima a tourné un film *Merry Christmas Mr Lawrence*, avec David Bowie, qui traite exactement de ce qui précède. Durant le dernière guerre, les Japonais ont un camp de prisonnier anglais dans la jungle. Les prisonniers anglais souhaitent effectuer des déprédations dans le camp, durant la nuit, pour montrer qu'ils sont mécontents de leur sort. Mais les déprédations, que constatent les Japonais au petit matin peuvent aussi avoir été faite par des bêtes sauvages. L'officier japonais (Takeshi Kitano) déclare dans un discours que chaque mauvaise performance doit être sanctionnée par un châtiment. Ainsi, pour toute déprédation constatée dans le camp, l'officier anglais le plus gradé reçoit dix coups de bambou. La conséquence de cette politique est que les prisonniers anglais ne commettent plus aucune déprédation, car ils souhaitent minimiser les punitions données à leur chef. Ainsi, celui-ci est toujours puni pour des déprédations commises par les bêtes sauvages et les Japonais savent qu'il est toujours innocent. Mais la punition est nécessaire pour décourager les prisonniers anglais de commettre des déprédations.

Il y a de nombreux résultats théoriques et développements sur les jeux bruités. Par exemple, on peut établir le résultat conforme à l'intuition que plus le bruit est élevé, plus les équilibres du jeu se rapprochent de l'équilibre de Nash du *stage game*, c'est-à-dire plus la coopération est limitée et les punitions fréquentes.

Un type d'équilibre particulier est le *trigger equilibrium*. Chaque fois que le gain d'un jouer est inférieur à l'espérance de gain attachée à la coopération, pour un montant égal ou supérieur à T, il engage un cycle de punition qui dure N parties. La punition consiste à jouer conformément à l'équilibre de Nash du *stage game* pour ces N parties. On cherche alors à déterminer les valeurs optimales de T et N, c'est-à-dire celles qui minimisent les écarts des gains moyens de chaque joueur relativement aux espérances du gain obtenues en pleine coopération.

3. Collusion implicite dans un oligopole

Cette section a pour but d'illustrer les concepts des deux sections précédentes, à l'aide d'un exemple emprunté à l'économie industrielle. Je considère deux entreprises identifiées par les indices 1 et 2. Elles produisent un même bien. Le prix de ce bien est P. Les productions respectives des deux entreprises sont X_1 et X_2. L'offre de bien sur le marché est $X = X_1 + X_2$. La fonction de demande inverse pour le bien est $P = A - X$, où A est un paramètre fixe. Le coût marginal de production est le même pour les deux entreprises et est égal à c qui est constant. Il n'y a pas de coût fixe de production.

Le premier fonctionnement du marché que j'examine est une concurrence par les quantités, dite concurrence à la Cournot, entre les deux entreprises, qui conduit à l'équilibre de Cournot. Le profit de l'entreprise 1 est $\Pi_1(X_1, X_2) = (A - X_1 - X_2)X_1 - cX_1$. Le profit de l'entreprise 2 est $\Pi_2(X_1, X_2) = (A - X_1 - X_2)X_2 - cX_2$. L'entreprise 1 choisit X_1 de façon à maximiser $\Pi_1(X_1, X_2)$ en anticipant que X_2 est à sa valeur de l'équilibre de Cournot. L'entreprise 2 choisit X_2 de façon à maximiser $\Pi_2(X_1, X_2)$ en anticipant que X_1 est à sa valeur de l'équilibre de Cournot. Nous remarquons ainsi que l'équilibre de Cournot n'est rien d'autre que l'équilibre de Nash du jeu que je viens de définir. Les conditions du premier ordre des deux maximisations sont :

$$A - X_1 - X_2 - X_1 - c = 0$$

$$A - X_1 - X_2 - X_2 - c = 0$$

On déduit de ces deux conditions les productions de l'équilibre de Cournot : $X_1 = X_2 = (A-c)/3$, ainsi que le profit de chacune des entreprises dans cet équilibre : $\Pi_1 = \Pi_2 = (A-c)^2/9$.

Le second fonctionnement du marché est celui d'une entente où les deux entreprises maximisent leur profit total et divisent celui-ci en deux parts égales qu'elles s'attribuent respectivement. Leur profit est alors $\Pi_1(X) = \Pi_2(X) = [(A-X)X - cX]/2$. La condition du premier ordre de la maximisation est $A - X - X - c = 0$. La production de chacune des entreprises est $X_1 = X_2 = X/2 = (A-c)/4$. Le profit de chacune des entreprises est $\Pi_1 = \Pi_2 = (A-c)^2/8$.

En cas d'entente, les deux entreprises réduisent leur production relativement à l'équilibre de Cournot. Cela fait monter le prix de vente. La perte de volume des ventes est plus que compensée par la hausse de prix, et les profits des entreprises sont plus élevés que dans l'équilibre de Cournot. On remarque que l'entente correspond à la coopération que j'avais présentée dans ma discussion du dilemme du prisonnier de la section 1. Elle permet à chacun des deux joueurs de gagner plus d'argent. Mais elle est impossible à mettre en œuvre, quand le jeu est joué une fois, en l'absence de mécanisme d'*enforcement.* En effet, une fois que chacune des entreprises s'est engagée à réduire sa production, chacune d'entre elle a intérêt à profiter du prix élevé résultant de la baisse de production de son partenaire pour vendre discrètement au-delà du quota convenu. Si vous suivez le développement du marché du pétrole dans la presse, vous savez que l'OPEP, et son leader l'Arabie Saoudite, essaient toujours d'organiser un système de quotas de production, et que les producteurs essaient toujours de vendre plus ou moins discrètement au-delà de leur quota. Tous les cartels de matières premières et de produits agricoles souffrent de ce comportement de passager clandestin, et ils sont tous extrêmement fragiles.

Dans les raisonnements précédents, j'ai supposé que le jeu n'était joué qu'une fois. Cette hypothèse est déraisonnable, et il vaut mieux supposer qu'il est joué un nombre infini de fois. Alors, le *folk theorem* montre que l'entente monopolistique est un équilibre de Nash. La sanction punissant l'entreprise qui violerait son quota pourrait être que son partenaire revient définitivement à l'équilibre de Cournot. Ainsi, nous constatons qu'une entente est possible sans rencontres de dirigeants, négociations, documents et contrats écrits, toutes choses qui déplaisent profondément aux autorités de la concurrence. Ainsi, il peut être extrêmement difficile de prouver l'existence d'une entente, autrement qu'en observant les comportements des entreprises. L'exemple de cette section est très riche. Un type d'ententes particulièrement combattues et celui entre entreprises fabriquant des biens intermédiaires homogènes et comparables (par exemple des articles de quincaillerie). Le type de concurrence qu'on peut normalement espérer entre ces entreprises est une concurrence par les niveaux de production conduisant à un équilibre de Cournot (on remarque que celui-ci diffère de la libre concurrence et conduit à un profit positif des entreprises, mais il est moins mauvais que la situation à laquelle aboutit une entente).

On remarque cependant que le *folk theorem* établit aussi l'existence de beaucoup d'autres équilibres de Nash, et cela peut expliquer la fragilité des cartels, que j'avais soulignée un peu plus haut.

On peut rendre le modèle plus intéressant en supposant que A n'est plus un paramètre constant, mais est une variable aléatoire, prenant la valeur A_t à la tème partie du jeu (ou si vous préférez à la tième période). Les deux entreprises observent le prix obtenu dans cette partie P_t, mais elles n'observent pas A_t. Chaque entreprise connaît sa production, mais ignore celle de son concurrent. Ainsi, un prix déprimé, peut signifier que l'un des joueurs a vendu plus que son quota de l'entente implicite, ou que la demande du marché pour le bien a été déprimée pour des causes exogènes (A_t est devenu bas).

La solution à ce problème a été donnée dans la section 2. Quand le prix passe en dessous d'un certain niveau, chaque entreprise doit punir son partenaire en produisant davantage pour un certain nombre de périodes. La punition doit être suffisante pour décourager de tricher, c'est-à-dire de vendre au-delà de son quota en dehors des périodes de punition. Mais elle ne doit pas être trop forte pour ne pas réduire excessivement les gains de la coopération.

Les résultats théoriques obtenus pour ce type de jeux sont assez naturels. Une collusion oligopolistique (un cartel) fonctionne d'autant mieux que chaque entreprise est mieux informée sur ses partenaires. Il faut punir de temps en temps. Le cartel fonctionne d'autant mieux et permet de gagner d'autant plus d'argent qu'il a moins de membres. La collusion est d'autant plus facile que le bruit (la variance de A_t) est faible. Il y a beaucoup d'années j'avais lu un livre passionnant de Chandler, intitulé *Strategy and Stucture.* Ce livre d'écrivait l'essor des grandes entreprises américaines au 19ème et au 20$^{\text{ème}}$ siècle. Un résultat du livre est qu'un cartel fonctionne bien quand son environnement est stable. Il s'effondre quand l'environnement devient instable.

4. Réputation

Je vais me borner à donner deux exemples que je trouve assez profonds.

Dans le premier exemple, je considère un monopole qui peut produire un bien de bonne qualité ou un bien de mauvaise qualité. La fonction de demande inverse pour le bien de bonne qualité est $P = 10 - X$ Celle pour le bien de bonne qualité est $P = 4 - X$. Le coût unitaire de production du bien de bonne qualité est 2. Celui du bien de mauvaise qualité est 1. Les consommateurs ne peuvent pas évaluer la qualité du bien avant de l'avoir acheté. L'entreprise a le monopole de ce bien.

Si le jeu est joué une fois (par exemple si la firme opère par l'intermédiaire d'un colporteur qui vient une fois au village et ne revient plus jamais, ou si la firme fabrique un bien qui n'a pas de marque), alors il est de l'intérêt de l'entreprise de produire du bien de mauvaise qualité, quelle que soit l'opinion de l'acheteur. En effet, comme la qualité du bien n'est pas observable, l'opinion de l'acheteur ne peut pas être altérée si l'entreprise produit du bien de bonne qualité (qui est plus coûteux à fabriquer). Les acheteurs anticipent ce choix de l'entreprise est savent donc que le bien qui leur est offert est de mauvaise qualité. L'entreprise maximise alors son profit en produisant et vendant 1.5 unités de bien au prix de 2.50 l'unité. Son profit est de 2.25.

Supposons maintenant que le jeu soit joué un nombre infini de fois (l'entreprise utilise le service d'un commerçant ayant un magasin dans le village, ou a attribué une marque à son produit). A la tème partie (ou si vous préférez période), les consommateurs ne connaissent pas la qualité du bien qui leur est vendu. Mais ils connaissent la qualité du bien qui leur avait été vendu aux périodes $t-1,\ t-2$, etc. La firme maximise son profit actualisé par le facteur d'escompte α .

Un équilibre de Nash possible est celui-ci. Les consommateurs anticipent que la firme leur propose dans la partie courante du bien de bonne qualité si elle leur a vendu du bien de bonne qualité lors des trois parties précédentes. Autrement, ils estimeront que la firme leur propose du bien de mauvaise qualité. Pour les trois premières parties ils estiment que la firme leur propose du bien de bonne qualité (sauf s'ils ont été déçus lors d'une partie antérieure).

On peut alors montrer que la firme produira toujours du bien de bonne qualité. Sa production sera de 4 unités par période. Le prix sera de 6 et le profit sera de 16 par période. Si la firme trichait pour une période en produisant du bien de mauvaise qualité que les consommateurs achèteraient en croyant que c'est du bien de bonne qualité, elle ferait un profit durant cette période de 20. Mais elle ne gagnerait plus que 1.5 durant les trois périodes suivantes, qui sont nécessaires pour regagner la réputation perdue : l'entreprise devrait alors produire pour trois périodes du bien de bonne qualité qui serait perçu par les acheteurs comme étant de mauvaise qualité. Pour toutes les valeurs raisonnables du facteur d'actualisation, le gain de la tricherie est inférieur au coût résultant de la perte de réputation.

De façon générale, on s'aperçoit que pour un facteur d'actualisation suffisamment élevé, il est de l'intérêt d'une entreprise d'investir en réputation, en produisant du bien de bonne qualité, même si cela prend du temps aux consommateurs pour percevoir cette qualité et pour être convaincu de sa pérennité.

Dans cet exemple je n'ai examiné qu'un équilibre de Nash possible. Il en existe beaucoup d'autres, et donc beaucoup d'autres situations peuvent émerger sur le marché. Comme dans les deux sections précédentes, si la qualité est observée avec un bruit (ou si elle n'est pas entièrement contrôlable et observable par l'entreprise), d'autres complications intéressantes apparaissent.

Dans le second exemple, je considère la cas d'une entreprise qui vit éternellement et s'engage dans une concurrence duopolistique avec une succession de rivaux aux dates $t = 1,2,3,...$ La particularité de ce jeu est que le concurrent change à chaque période.

On suppose que la concurrence est du type Cournot, avec un bien unique dont la fonction de demande inverse est $P = A - X$. Le coût de production unitaire du bien est c. Comme le concurrent change à chaque période, il ne peut pas y avoir d'entente ou collusion comme dans la section 3. L'équilibre de Cournot est, comme on l'avait vu plus haut, caractérisé par les productions $X_1 = X_2 = (A-c)/3$. Ces productions sont plus élevées que celles obtenues dans le cas d'entente ($(A-c)/4$).

Maintenant, il est possible de démontrer que les stratégies suivantes constituent un équilibre de Nash, si $\alpha \geq 9/17$. La firme éternelle produit $(A-c)/2$ tant qu'elle a produit $(A-c)/2$ dans le passé. Si elle dévie, alors elle produira $(A-c)/3$ éternellement. La firme concurrente produit

$(A-c)/4$ si la firme éternelle a produit $(A-c)/2$ dans le passé. Autrement, elle produira $(A-c)/3$.

La firme qui vit éternellement a ainsi la possibilité d'obtenir 2/3 du marché et des profits, et donc brime ses concurrents. L'exemple donne une spécification du concept de dissuasion. Si, on ajoutait à l'exemple un coût fixe d'entrée dans le marché, la dissuasion deviendrait complète si ce coût fixe était suffisamment élevé, aucune firme concurrente n'entrant alors sur le marché. Pour cela il faut cependant que l'entreprise éternelle produise plus que le niveau de production de monopole. Autrement les concurrents entreraient sur le marché. On a donc *une* illustration de l'idée de Baumol sur les marchés contestables : une entreprise unique dans un secteur peut produire plus que l'équilibre de monopole et faire moins de profit qu'un monopole, uniquement pour décourager des concurrents potentiels d'entrer sur son marché.