Chapitre 2
Solution des jeux non coopératifs

Il existe un grand nombre de concepts de solution pour un jeu non coopératif, du type de ceux que nous avons introduits dans le chapitre 1. Mais avant d'examiner ces concepts nous devons réfléchir un peu plus sur les concepts d'information qui sont assez subtils. La première définition est simple. Considérons le jeu écrit sous forme extensive. Nous avons vu qu'un joueur doit prendre une décision à chaque ensemble ou nœud d'information le concernant. Un ensemble d'information peut inclure plusieurs nœuds de décision. Mais la décision doit être la même pour chacun de ces nœuds puisque le joueur n'a pas l'information nécessaire pour les distinguer. Si un jeu a la propriété particulière que chaque ensemble d'information de chaque joueur contient un unique nœud de décision, on dit que ce jeu est à *information parfaite.* La forme extensive d'un tel jeu ne comporte donc pas de pointillés.

L'imperfection de l'information peut avoir des causes très différentes. Commençons par supposer que chaque joueur connaît tout, sauf les actions courantes et futures des autres joueurs. Les actions passées (du joueur ou de ses adversaires) sont observées, et le résultat de cette observation n'est jamais oublié (hypothèse de *mémoire parfaite*). Sous cette hypothèse, le jeu n'a aucune composante aléatoire intrinsèque et on peut espérer que chaque joueur arrivera par un simple raisonnement à calculer les choix que feront ses partenaires. La solution du jeu devrait alors être parfaitement déterminée, sans aucune composante aléatoire.

Cependant, si nous admettons des stratégies mixtes, nous introduisons une incertitude sur les stratégies pures qui seront effectivement jouées, et donc sur les gains effectifs des joueurs. Cependant cette incertitude est ajoutée au jeu, et ne s'y trouvait pas originellement.

Les choses sont un peu différentes si on admet que la nature est un des joueurs. La nature joue de façon intrinsèquement aléatoire, et il n'est pas possible d'inférer son choix d'un raisonnement logique : on connaît juste les probabilités que la nature a affectée à chacune de ses actions. Il apparaît donc un élément aléatoire essentiel au niveau même du jeu. L'exemple du chapitre 1 introduisait une telle incertitude, puisque Joks devait prendre sa décision en sachant seulement que la Nature déterminera si le marché est grand ou petit par un tirage aléatoire avec les probabilités 0.4 et 0.6.

Une situation un peu différente est si la connaissance de certains aspects du jeu par un ou plusieurs joueurs est imparfaite. Par exemple, Joks ne connaît pas avec certitude les coûts de production de Beljeau, ou le niveau de ses ventes, si le marché est grand et si Beljeau n'y entre pas. Mais il a des évaluations aléatoires de ces coûts ou ventes (par exemple une probabilité de 30% que le coût unitaire est de 2 dollars et de 70% qu'il est de 4 dollars). On peut alors remarquer que l'incertitude d'un joueur sur certaines caractéristiques de son concurrent peut être formalisée par le fait qu'au début du jeu chacune de ces caractéristiques est possible, puis que la Nature tire aléatoirement laquelle de ces caractéristiques prévaut. Le joueur doit prendre ses décisions avant que la Nature ait effectué son tirage, alors que son concurrent (qui connaît ses caractéristiques propres) prend ses décisions après que la Nature ait effectué son tirage et en connaissant le résultat de celui-ci. Ainsi l'incertitude de Joks sur le coût de production de Beljeau peut être formalisée en supposant qu'après le choix de Beljeau, mais avant le choix de Joks, la Nature choisit aléatoirement la valeur de ce coût. L'incertitude d'un joueur sur les caractéristiques de son concurrent peut ainsi être formalisée par la simple introduction de la Nature dans l'ensemble des joueurs et donc par un jeu à information imparfaite.

Un jeu où le joueur 1 ne peut effectuer que des prévisions aléatoires sur certaines caractéristiques du joueur 2 et où le joueur 2 ne peut avoir que des prévisions aléatoires de caractéristiques du joueur 1, et dit à *information incomplète.* On vient de voir qu'un tel jeu peut être formalisé comme un jeux à *information imparfaite* où la nature tire aléatoirement au début du jeu les caractéristiques des joueurs, et où chaque joueur connaît le résultat du tirage le concernant, mais pas celui du tirage concernant son adversaire. Bien que l'information incomplète soit un cas particulier de l'information imparfaite, elle pose des problèmes assez profonds que nous effleurerons à la fin de ce chapitre.

Comme je le disais plus haut il existe un grand nombre de concepts très différents de solution d'un jeu non coopératif. Ces concepts conduisent souvent à des résultats assez voisins, ou au moins assez cohérents entre eux. Si ce n'était pas le cas, il y aurait lieu de désespérer de la théorie des jeux, et on pourrait abandonner cette discipline. Mais le monde n'est quand même pas parfait, et les différences de résultats auxquels conduisent les différents concepts peuvent parfois être embarrassantes. Mon impression est que la théorie des jeux purement théorique peut souvent être frustrante et conduire à des résultats qui apparaissent d'autant moins convaincants que l'on approfondit la réflexion à leur égard. Cependant je défendrai la thèse dans ce cours que beaucoup de paradoxes et d'insatisfactions de la théorie des jeux proviennent simplement de problèmes de la réalité mal posés en termes de cette théorie. Je donnerai quelques exemples accréditant mon point de vue.

1. Dominance et dominance itérée pour les jeux sous forme normale

1.1. Dominance stricte

Revenons à l'exemple du chapitre précédent concernant la concurrence entre Joks et Beljeau.

Si Beljeau savait que Joks jouerait s_1, sa meilleure réponse serait t_2. Si Beljeau savait que Joks jouerait s_2, sa meilleure réponse serait encore t_2. Certes Beljeau ne sait pas ce que jouera Joks. Mais il sait qu'il ne sera jamais justifié de sa part de jouer t_1, t_3 ou t_4. Evidemment, Joks sait également que Beljeau n'aura aucun intérêt à jouer ces trois stratégies.

Les trois stratégies éliminées sont dites *strictement dominées* par la stratégie t_2 : t_2 donne à Beljeau un gain strictement supérieur à celui obtenu par la stratégie t_1 (t_3 ou t_4), quelle que soit la stratégie choisie par Joks.

Comme Joks sait que Beljeau jouera t_2, sa meilleure stratégie sera alors s_1 : s_1 domine strictement s_2, c'est-à-dire assure à Joks un gain strictement supérieur, pour les stratégies non encore éliminées de Beljeau. Nous venons de donner un exemple du critère de *dominance itérée stricte*. Un autre exemple permettra de mieux comprendre la nature de ce critère. Je considère le jeu ci-dessous :

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Joueur 2</td></tr>
<tr><td>t_1</td><td>t_2</td><td>t_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Joueur 1</td><td>s_1</td><td>4
3</td><td>2
7</td><td>0
4</td></tr>
<tr><td>s_2</td><td>5
5</td><td>5
-1</td><td>-4
-2</td></tr>
</table>

Dans la première phase de leurs raisonnements, les deux joueurs remarquent que si le joueur 2 savait que le joueur 1 allait jouer s_1, sa meilleure réponse serait t_2. S'il savait que le joueur 1 allait jouer s_2 sa meilleure réponse serait t_1. Ainsi, les deux joueurs savent qu'il ne sera jamais de l'intérêt du joueur 2 de jouer t_3, et cette stratégie peut être éliminée du jeu ci-dessus.

Une fois cette élimination faite, les deux joueurs remarquent que si le joueur 1 savait que le joueur 2 allait jouer t_1, sa meilleure réponse serait s_2. S'il savait que le joueur 2 allait jouer t_2 sa meilleure réponse serait encore s_2. Ainsi, les deux joueurs savent qu'il ne sera jamais de l'intérêt du joueur 1 de jouer s_1, et cette stratégie peut être éliminée du jeu ci-dessus.

Finalement, le joueur 2 sait que le joueur 1 jouera s_2. Il sera de son intérêt alors de jouer t_1.

Cette méthode de calcul de la solution d'un jeu est parfois exprimé de la façon suivante (dont la clarté ne me semble pas totale). Chaque joueur considère son adversaire comme rationnel, considère que son adversaire le considère comme rationnel, considère que son adversaire considère que lui-même considère son adversaire comme rationnel, etc.

On peut donner la définition suivante. On dit qu'une stratégie du joueur 1 est dominée *strictement* par les autres stratégies du joueur 1, si pour chaque stratégie du joueur 2, *certaines* des autres stratégies du joueur 1 sont *strictement meilleures* que la stratégie considérée.

On élimine d'abord les stratégies strictement dominées du joueur 1, puis, en ne considérant que les stratégies restantes, on élimine les stratégies strictement dominées du joueur 2, puis en ne considérant que les stratégies restantes, on élimine les stratégies strictement dominées du joueur 1, etc.

Quelle est la valeur du critère de dominance stricte itérée pour définir la solution d'un jeu ? Une solution d'un jeu doits satisfaire trois critères. D'abord, elle doit sembler naturelle. Ensuite elle doit être logique, c'est-à-dire ne pas contenir de contradictions internes. Enfin elle doit être féconde, c'est-à-dire rendre compte de résultats de jeux que l'on observe dans la réalité. Ces jeux peuvent être artificiels et être joués entre un groupe d'étudiants dans un laboratoire d'économie ou psychologie expérimentale. Ces jeux peuvent aussi être des jeux réels, et les critères de ce chapitre rendront compte de comportements de la réalité (par exemple des comportements de concurrence entre entreprises, ou du fonctionnement de certains marchés). En cela ils sont féconds, même s'il existe de nombreuses situations de la réalité qui semblent contredire les critères de ce chapitre. Mais là aussi, il faudra réfléchir si ce sont les critères qui sont contredits ou si la traduction de la situation réelle en terme de jeu a été correcte.

1.2. Dominance faible

Si, dans la définition ci-dessus, on remplace strictement meilleur par indifférent ou meilleur, on obtient le critère de *dominance faible*. Plus précisément, on dit qu'une stratégie du joueur 1 est *faiblement dominée* par les autres stratégies du joueur 1 si pour *chaque* stratégie du joueur 2 *certaines* des autres stratégies du joueur 1 sont indifférentes ou meilleures que la stratégie considérée, et si pour au moins une stratégie du joueur 2 certaines des autres stratégies du joueur 1 sont strictement meilleures que les stratégies considérées. Je vais donner deux exemples pour illustrer le critère de dominance faible itérée. Je considère d'abord le jeu ci-dessous :

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Joueur 2</td></tr>
<tr><td>t_1</td><td>t_2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Joueur 1</td><td>s_1</td><td>10
0</td><td>5
2</td></tr>
<tr><td>s_2</td><td>10
1</td><td>2
0</td></tr>
</table>

L'application du critère est alors très simple. s_2 est dominé faiblement par s_1, et est donc éliminé. Alors, le joueur 1 joue s_1 et le joueur 2 sait qu'il aura intérêt à jouer t_2. Je considère ensuite le jeu ci-dessous

		Joueur 2		
		t_1	t_2	t_3
Joueur 1	s_1	10 0	5 1	4 -200
	s_2	10 100	5 0	0 -100

Appliquons le principe de la dominance itérée faible en commençant par le joueur 2. Sa stratégie t_3 est strictement dominée par ses deux autres stratégies disponibles, et peux donc être écartée. Dans le jeu tronqué de la dernière colonne, plus aucune stratégie peut être éliminée par le critère de dominance, et nous sommes dans une impasse.

Intuitivement, le profil stratégique s_2, t_1 semble une solution raisonnable du jeu. Je peux fonder cette évaluation par une négociation entre les deux joueurs. Le joueur 1 peut déclarer que ses deux stratégies disponibles lui donnant le même gain quel que soit la stratégie adoptée par son adversaire, il choisira de jouer s_2. Si son adversaire le croit, il sera ravi de jouer t_1 et les gains respectifs des deux joueurs seront 10 et 100. Mais pourquoi le joueur 1 tiendrait-il son engagement et ne jouerait-il pas s_1. Dans ce cas il gagnerait encore 10, alors que son adversaire ne gagnerait plus que 0. Cette possibilité pour le joueur 1 d'effectuer une cruauté gratuite à l'égard du joueur 2 est bien sûr comprise de celui-ci, qui ne sera donc pas prêt à croire en son engagement. Nous sommes toujours dans l'impasse. Mais peut-être trouverez-vous cette impasse artificielle, parce que vous ne croyez pas en la méchanceté gratuite. Dans ce cas, ce qui vous gêne est en fait le critère de dominance faible, qui apparaît moins naturel que ce qu'il paraissait *a priori*.

Pourtant le critère de dominance faible permet de trouver une solution unique du jeu. Pour cela il faut commencer les itérations, non plus par le joueur 2, mais par le joueur 1. Alors, la stratégie s_2 est dominé faiblement par la stratégie s_1 et peut donc être éliminée. Le joueur 2 jouera alors t_2 qui domine strictement ses autres stratégies relativement à la seule stratégie non éliminée de son adversaire. La solution du jeu sera alors le profil stratégique s_1, t_2 et les gains des deux joueurs seront respectivement 5 et 1. On ne retient donc pas le profil stratégique s_2, t_1 comme solution du jeu !!!

On remarque que l'ordre des éliminations des stratégies a un effet quand on applique le critère de dominance faible itérée ; en revanche il n'en a pas pour le critère de dominance forte itérée.

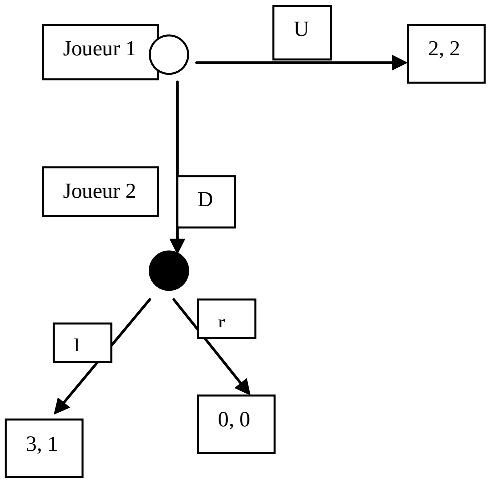
L'application que je viens de donner du critère de la dominance faible itérée est correcte. Cependant, elle m'a conduit à éliminer la stratégie s_2 parce qu'elle apporte un gain inférieur au joueur 1 pour une stratégie du joueur 2 que celui-ci n'aura jamais intérêt à jouer. Si là encore vous êtes gêné par le critère de la dominance faible itérée, vous n'avez pas forcément tort. Ce principe est en fait discutable et, conduit parfois, comme dans cet exemple, à éliminer une solution raisonnable et à retenir une solution peu convaincante.

J'introduirai le concept d'équilibre de Nash dans la section 3. Ce nouveau concept conduit dans cet exemple à retenir deux solutions du jeu qui sont les profils stratégiques s_2,t_1 et s_1,t_2. Je citerai l'évaluation de Kreps, (un économiste qui joua un grand rôle dans le développement de la théorie des jeux) qui est que toute solution raisonnable d'un jeu est un équilibre de Nash, mais que certains équilibres de Nash peuvent sembler peu convaincants. Le critère de solution raisonnable, que j'ai déjà utilisé, fait appel au bon sens et est donc ambigu. Mais dans cet exemple, on est en accord avec l'évaluation de Kreps : le premier équilibre de Nash est raisonnable et le second est bizarre. Il est donc dommage que le critère de dominance faible itérée n'ait retenu que le second équilibre de Nash comme solution du jeu.

Un jeu qui par application du critère de dominance faible itérée a une solution unique est dit *dominance solvable.*

2. Backward induction dans les jeux à information parfaite sous forme extensive

Les concepts de dominance forte ou faible itérée s'introduisent naturellement quand le jeu est écrit sous forme normale. Je vais introduire un nouveau concept qui est naturel pour un jeu écrit sous forme extensive. Je vais commencer par donner l'exemple d'un jeu dont la forme extensive est :



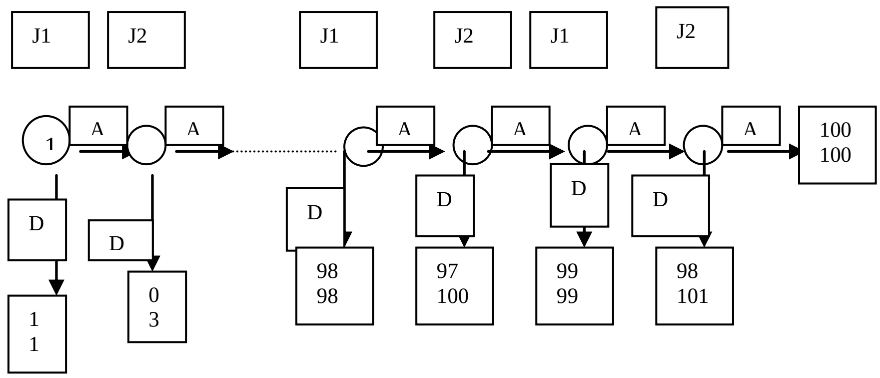
Pour appliquer le critère de « backward induction » je commence par considérer la dernière étape du jeu. Dans celle-ci, le joueur 2 choisira la stratégie l qui est plus avantageuse pour lui que la stratégie r. C’est le joueur 1 qui agit dans la première étape du jeu. Ce joueur comprend cependant que s’il choisit D, le joueur 2 choisira l. Le joueur 1 aura intérêt à choisir D au lieu de U, puisque la première stratégie lui rapporte 3 et la seconde ne lui rapporte que 2. Ce critère a un aspect itératif qui évoque celui de la dominance itérée. Pour bien comprendre ce lien je vais donner la forme normale de ce jeu.

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	2 2	2 2
	s_2	3 1	0 0

Les stratégies du joueur 1 sont triviales à définir : s_1 est la décision U et s_2 est la stratégie D. La définition des stratégies du joueur 2 est un peu plus subtile. t_1 signifie : si le joueur 1 joue U, le joueur 2 ne fait rien, si le joueur 1 joue D, le joueur 2 joue l. t_2 signifie : si le joueur 1 joue U, le joueur 2 ne fait rien, si le joueur 1 joue D, le joueur 2 joue r. On remarque alors que t_2 est faiblement dominé par t_1 et peut donc être éliminé. Dans la partie restante de la matrice de gain s_2 domine s_1. Le critère de la dominance faible itérée appliqué au jeu sous forme normale conduit donc à la même solution que le critère de *backward induction* appliqué au jeu sous forme extensive.

Pour bien comprendre le lien entre les deux critères on doit remarquer que l'exemple concerne un jeu à information parfaite : aucune ligne en pointillés n'apparaît dans la forme extensive. Il est possible de montrer que pour un jeu à information parfaite, le critère de *backward induction* appliqué au jeu sous forme extensive conduit à des solutions qui auraient pu être obtenues par le critère de la dominance faible itérée appliqué au jeu sous forme normale.

Un théorème important établit qu'un jeu à information parfaite ayant un nombre fini de noeuds est *dominance solvable*, c'est-à-dire a une solution si on applique le critère de *backward induction* ou de dominance faible itérée. Cette solution est unique si aucun joueur ne reçoit le même paiement à deux nœuds terminaux différents. Le jeu d'échec est un jeu à information parfaite. Il a donc une solution, mais comme le gain ne peut prendre que trois valeurs (blancs gagnent – noirs perdent, blancs perdent – noirs gagnent, nul), il a beaucoup de solutions. Personne ne connaît ces solutions qui sont trop compliquées à calculer, ni l'issue du jeu (ni même si elle est unique). Examinons un dernier exemple qui donne une critique du critère de *backward induction* dans un jeu à information parfaite. Je considère le jeu ont la forme extensive est :



Les joueurs 1 et 2 jouent à tour de rôle. Le critère de *backward induction* conduit à éliminer en 200 itérations tous les choix A. La solution obtenue est qu'à la première étape du jeu le joueur 1 joue D. Alors le jeu s'arrête et les gains des deux joueurs sont respectivement 1 et 1. Cette solution est bien peu réaliste.

Réfléchissons un peu sur la façon dont nous avons obtenu cette solution. A la dernière étape du jeu, c'est au joueur 2 de jouer. S'il joue A il gagne 100, s'il joue D il gagne 101. Donc il jouera D. A l'avant-dernière étape du jeu, quand c'est au tour du joueur 1 de jouer, celui-ci sait que s'il joue A, le joueur 2 jouera D la fois suivante et il gagnera 98. S'il joue D, le jeu s'arrêtera et il gagnera 99. Donc le joueur 1 jouera D. A l'avant-avant-dernière étape du jeu, le joueur 2 prévoit que le joueur 1 jouera D s'il joue lui-même A. Donc, il jouera D. Et ainsi de suite, nous arrivons à la solution du jeu qui donne à chacun des joueurs le gain ridiculement bas de 1.

Ce qui choque avec cette solution est que si les joueurs étaient un peu moins intelligents ils joueraient A durant la plus grande partie du jeu. Vers la fin du jeu, le premier à appliquer le critère de *backward induction* et à jouer D percevra un gain légèrement supérieur à celui qu'il aurait en jouant A et en laissant son adversaire jouer D au coup d'après. Mais les deux joueurs auront ramassé chacun un gros paquet. Appliquer le critère de *backward induction* avec un grand nombre d'itérations peut donc conduire à des résultats bizarres.

Pour mieux vous convaincre du caractère irréaliste de l'application du critère de *backward induction* sur un grand nombre d'itérations je peux vous raconter la nouvelle de Stevenson : *La bouteille du diable.* Cette bouteille contient un petit démon qui satisfait tous les désirs de son propriétaire. Mais celui-ci doit la revendre avant sa mort, s'il ne veut pas être damné, et le prix de vente doit être *strictement inférieur* au prix où il l'avait achetée. Le problème est que l'argent n'est pas infiniment divisible. Disons que la plus petite pièce de monnaie du monde soit le tahonga, qui représente un centième de centime d'euro et qui a cours dans une petite île du Pacifique (je ne me souviens pas des détails de cette partie de l'histoire). Supposons que quelqu'un vienne me proposer d'acheter la bouteille pour 10000 euros. Si je suis « rationnel » et fais un raisonnement de *backward induction,* je calcule que personne n'achètera la bouteille pour 2 tahongas, puisqu'un acheteur potentiel sait qu'il ne pourra pas la revendre à 1 tahonga, car personne ne veut être damné. Donc, aucun acheteur n'acceptera d'acheter la bouteille pour 3 tahongas, puisque qu'il sait qu'il ne pourra pas la revendre, et ainsi de suite. Donc je n'achèterai pas la bouteille pour 10000 dollars sachant que personne ne me la rachètera pour 10000 dollars moins 1 tahonga…..

Et pourtant, j'achèterais la bouteille à 10000 dollars si on me la proposait et je suis convaincu que je n'aurais aucun mal à la revendre pour 10000 dollars moins 1 tahonga. Si on me la proposait pour 50 cents j'hésiterais et commencerais à croire à la *backward induction*. Et encore…

Les personnages de la nouvelle agissent d'une façon infiniment plus intéressante et humaine que des spécialistes de la théorie des jeux. La conclusion est élégante et suggère une erreur dans la modélisation que je viens de vous présenter. Mais le mieux est de lire la nouvelle.

3. Equilibre de Nash

Ce critère est le plus populaire en théorie des jeux. Je vais commencer par une définition mathématique. Puis-je la discuterai à l'aide d'une série d'exemples.

Soit I joueurs, i=1,..,I. Soit $s_i \in S_i$ une stratégie du joueur i appartenant à l'ensemble des stratégies possibles pour ce joueur et soit $s = (s_1;..,s_I)$ un profil stratégique. Soit $u_i(s)$ le gain que procure ce profil stratégique au joueur i. Un profil stratégique $\hat{s} = (\hat{s}_1;..,\hat{s}_I)$ est un équilibre de Nash si pour chaque joueur i et chaque stratégie de ce joueur $s_i \in S_i$, nous avons :

$$u_i(\hat{s}) = u_i(\hat{s}_1,..,\hat{s}_{i-1},\hat{s}_i,\hat{s}_{i+1},..,\hat{s}_I) \geq u_i(\hat{s}_1,..,\hat{s}_{i-1},s_i,\hat{s}_{i+1},..,\hat{s}_I)$$

L'idée est que le joueur i choisit sa stratégie après avoir anticipé la stratégie que suivra chacun de ses adversaires. S'il anticipe que chaque adversaire jouera la stratégie associée à l'équilibre de Nash, il sera alors avantageux (ou plutôt non désavantageux) que lui-même joue la stratégie associée à l'équilibre de Nash. L'équilibre de Nash établit ainsi une cohérence entre les anticipations sur les stratégies choisies par les autres et la stratégie que l'on choisit pour soi-même. Ou si vous le préférez, l'équilibre de Nash repose sur l'hypothèse que les joueurs ont des anticipations rationnelles[1]. Je vais maintenant donner une série d'exemples.

Le premier exemple, le dilemme du prisonnier est un jeu dont la représentation normale est :

[1] On déduit aisément de la définition qu'une stratégie *strictement* dominée ne peut pas faire partie d'un profil stratégique qui est un équilibre de Nash

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	3 3	0 4
	s_2	4 0	1 1

Ce jeu a un seul équilibre de Nash s_2, t_2. En effet, si le joueur 2 est anticipé jouer t_2 par le joueur 1, celui-ci a intérêt à jouer s_2. Si le joueur 1 est anticipé jouer s_2 par le joueur 2, celui-ci a intérêt à jouer t_2. Si vous avez un peu de patience, vous pouvez vérifier qu'aucun autre profil stratégique du jeu ne satisfait la condition de cohérence requise par la définition de l'équilibre de Nash. Ce qui est remarquable avec l'équilibre de Nash est que le gain de chacun des deux joueurs est strictement inférieur à celui qu'il aurait avec le profil stratégique s_1, t_1. L'équilibre de Nash de cet exemple est donc dominé ou non optimum au sens de Pareto.

L'histoire qui motive le jeu est celle-ci. Deux gangsters ont effectué un gros *hold up*. Ils sont ensuite arrêtés et interrogés par la police dans deux salles séparées. Si les deux avouent, ils seront condamnés chacun à 3 ans de prison. Si seulement l'un d'entre eux avoue, il sera libéré, utilisé comme témoin contre son complice et celui-ci fera 4 ans de prison. Si aucun des deux gangsters n'avoue, on ne pourra les condamner que pour un délit mineur et ils iront chacun un an de prison. La stratégie s_1 signifie ne pas avouer. La stratégie s_2 signifie avouer. On a la même convention pour t_1 et t_2. Les chiffres donnés dans la matrice de gain représentent 4 moins le nombre d'années de prison. La solution optimale au sens de Pareto s_1, t_1 correspond au cas où aucun des deux complices n'accepte de parler. On l'appelle parfois solution coopérative du jeu. L'équilibre de Nash est le cas où les deux complices avouent. L'intérêt de l'exemple est de saisir une situation où la non coopération conduit à un résultat inférieur pour tous à celui obtenu par la coopération, mais où aussi il n'y a aucun intérêt pour personne à coopérer. Si le joueur 1 était un homme d'honneur et un peu stupide il n'avouerait pas. Alors, le joueur 2 gagnerait encore plus en avouant, alors que le joueur 1 perdrait encore plus. La coopération apparaît ainsi comme une issue sociale peu naturelle, et les exemples de cette situation sont multiples dans la réalité.

Le deuxième exemple est un jeu dont la forme normale est :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	2 1	0 0
	s_2	0 0	1 2

Ce jeu a deux équilibres de Nash, dont les profils stratégiques sont s_1, t_1 et s_2, t_2. L'histoire est celle-ci. Le joueur 1 est une jeune fille qui aime Mozart et le joueur 2 est un jeune homme qui aime Bach. Ils commencent à être amoureux l'un de l'autre. Il y a le même soir deux concerts dans la ville, un de Mozart et un de Bach. Aucun des deux joueurs n'ose téléphoner à l'autre pour lui demander d'aller au concert avec lui (ou elle)[2]. Les stratégies s_1 et t_1 consistent à aller au concert de Mozart. Si ce sont celles choisies par les deux joueurs, on voit que la jeune fille a la double joie d'écouter de la musique qu'elle aime avec le jeune homme qu'elle commence à aimer, alors que le jeune homme a la seconde satisfaction d'être avec son amoureuse. Le profil stratégique s_1, t_2 est celui où chacun va au concert qu'il aime, mais n'y trouve pas l'autre, est affreusement déçu et ne tire aucun plaisir de la musique. Le profil stratégique s_2, t_1 est celui où chacun va au concert qu'il n'aime pas, n'y trouve pas l'autre, est affreusement déçu, mais quand même est un peu consolé de s'apercevoir que le futur petit ami ou la future petite amie a choisi d'aller à un concert qu'il ou elle n'aimait pas dans l'espoir de la ou le rencontrer.

La coexistence de deux équilibres de Nash pose en fait un problème. Dans la définition de ce concept, un joueur anticipe que ses adversaires joueront Nash. Mais s'il existe plusieurs équilibres de Nash, il y a plusieurs anticipations possibles. Quel mécanisme conduira tous les joueurs à anticiper le même équilibre de Nash ? Dans l'exemple, le jeune homme peut anticiper que la jeune fille ira au concert de Mozart et ira à ce concert. La jeune fille peut anticiper que le jeune homme ira au concert de Bach et elle ira au concert de Bach. Finalement, le résultat du jeu sera s_2, t_1 qui n'est pas un équilibre de Nash. Quand il existe plusieurs équilibres de Nash il faut introduire un mécanisme de coordination des anticipations des joueurs qui est souvent problématique. J'examinerai ce problème dans l'exemple suivant. Maintenant je vais développer un point de vue que la multiplicité des équilibres de Nash peut être le résultat d'un problème incorrectement traduit en termes de jeu. Si le problème avait été bien exprimé, on aurait eu un équilibre de Nash unique.

Dans la réalité, je pense que les deux joueurs raisonneront plus subtilement que ce que je viens de faire. La jeune fille sait que le jeune homme est amoureux d'elle et qu'il n'osera pas aller au concert de Bach. S'il y allait, il prouverait son égoïsme ou sa stupidité et elle aurait tout intérêt à cesser de s'y intéresser. La jeune fille pourra alors hésiter entre aller au concert de Mozart et savourer sa victoire, ou aller au concert de Bach pour montrer qu'elle est aussi une gentille fille dénuée d'égoïsme et se mettre en valeur. Quand à Mozart ou Bach, il y aura bien d'autres concerts et les deux joueurs s'en fichent un peu au fond. Ma critique peut apparaître peu sérieuse. Mais, mon point est simplement de montrer que des ambiguïtés de la théorie des jeux peuvent être artificielles et refléter tout simplement une mauvaise spécification du problème.

Le troisième exemple est un jeu dont la forme normale est :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	2 2	0 0
	s_2	0 0	1 1

L'histoire derrière le jeu est la même que précédemment, sauf que les deux joueurs préfèrent Mozart à Bach. Avec les profils stratégiques s_1, t_1 et s_2, t_2 ils se retrouvent au même concert, mais avec le second profil stratégique, la musique les ennuie tous les deux. Avec les deux autres profils stratégiques ils se manquent et ils sont tellement déçus que la musique n'a plus d'importance. Ce

[2] Si vous trouvez les deux joueurs trop timides, un autre scénario est celui que l'on trouve dans le roman de Carlos Fuente *Laura*. Mexico city avait avant la seconde guerre mondiale, deux compagnies téléphoniques concurrentes et non interconnectées. Carlos Fuente explique que de nombreux cœurs ont été brisés par cette défaillance du marché.

jeu a deux équilibres de Nash s_1, t_1 et s_2, t_2. La différence avec le jeu précédent est que le premier de ces équilibres est meilleur que le second pour les deux joueurs (le domine au sens de Pareto). Quand un jeu a plusieurs équilibres de Nash, que l'on peut classer les uns par rapport aux autres au sens de Pareto, on dit qu'il y a un *défaut de coordination.* Vous remarquerez que cette dénomination, propre à la théorie des jeux, est beaucoup plus spécifique que dans le langage courant.

Les macroéconomistes keynésiens adorent les jeux avec défaut de coordination, à mon avis pour des raisons idéologiques. J'essaierai de présenter par des exemple l'argumentation de ces économistes, puis j'exprimerai mon scepticisme personnel.

Dans les années soixante-dix j'avais lu un best seller écrit par un professeur de sociologie et de civilisation française de Harvard, Wily, qui s'intitulait *Village in the Vaucluse.* Au tout début des années cinquante cet universitaire, sa femme et ses deux enfants de 8 et 9 ans, avaient passé une année dans un petit village du Vaucluse. Il avait noté ses observations et pris quelques photos. La France qu'il décrivait était celle de Pagnol, mais avoir cette description faite par un étranger apporte beaucoup. Le livre est délicieux. Mais ce qui m'intéresse ici est que l'auteur note la faiblesse des investissements récents des paysans, par exemple en arbres fruitiers. Cette attitude est reliée à la morosité des paysans et à leur pessimisme sur l'évolution de leur environnement. Par exemple un paysan déclare : « Monsieur, bientôt les Américains et les Russes vont se faire la guerre chez nous. Alors, à quoi servirait-il de planter des arbres qui seront détruits bientôt ? ». Le séjour du Pr Wily dans le village coïncidait avec le guerre de Corée.

Le dernier chapitre de l'édition que j'ai lue de ce livre s'appelle *Ten years later.* L'auteur est revenu dans le village au début des années soixante. Il est impressionné par les changements. Le village s'est modernisé, les paysans ont investi et tout le monde est optimiste. Ces constatations capturent bien l'optimisme des Français et notamment des entrepreneurs durant la période des Trente Glorieuses qui a commencé vers 1950. Il est alors tentant d'expliquer la situation économique par les anticipations des entrepreneurs, ce que Keynes appelait *animal spirits.* Si chaque entreprise anticipe que les autres entreprises ont choisi de produire beaucoup et donc d'investir beaucoup et d'embaucher beaucoup de travailleurs, elle en conclut que la demande pour ses produits sera élevée. Elle embauchera donc du personnel, investira et produira en grande quantité. L'optimisme des anticipations conduit à des comportements qui valident cet optimisme, ou si vous voulez les anticipations sont auto-réalisatrices. En revanche si chaque entrepreneur était pessimiste sur les choix des autres entrepreneurs, il estimerait que la demande pour ses produits serait faible, et donc il investirait, produirait et embaucherait peu. Alors, le pessimisme des anticipations conduirait à des comportements qui valident ce pessimisme.

Vous remarquerez que nous sommes tout à fait dans une situation où il y a deux équilibres de Nash et un défaut de coordination. Nous sommes confrontés à la question déjà posée de l'homogénéité des anticipations. Pourquoi tous les entrepreneurs auraient-ils les mêmes anticipations, quel mécanisme les coordonne sur un optimisme commun ou un pessimisme commun ? Les économistes keynésiens bottent en touche plutôt que de répondre à cette question. Ils estiment que les anticipations sont coordonnées par un mécanisme indépendant des fondamentaux de l'économie et qu'ils appellent *sunspot*, par hommage à la constatation empirique de Jevons qui établissait certaines corrélations entre le cycle économique et les taches solaires. Les économistes keynésiens estiment en plus que l'Etat peut manipuler les anticipations de ses citoyens et les coordonner vers un optimisme général, générateur d'emploi, d'investissement et de croissance. Il y a avait une idée comme cela dans la planification indicative française des années 50 et des années 60 et dans l'interventionnisme de l'Etat. Il s'agissait alors d'assurer une paix sociale, de garantir à chacun une certaine sécurité et de venir en aide à ceux qui rencontraient des difficultés afin de générer l'optimisme et la volonté d'entreprendre.

Il est extrêmement difficile de savoir si l'interprétation que je viens de donner des Trente Glorieuses correspond à la réalité ou est une légende nationale, notamment utilisée par les partisans de la planification à la française. Tous les pays d'Europe occidentale (sauf le Royaume-Uni) ainsi que le Japon, ont connu de fortes croissances. Comme leurs modèles économiques, sociaux et politiques étaient très différents, on peut éprouver quelques doutes sur mon explication et se tourner vers des interprétations plus terre à terre. De plus, les modèles macroéconomiques avec défaut de coordination ne sont pas aussi faciles à écrire que ce qui peut sembler d'après ma présentation littéraire et sont un peu tirés par les cheveux.

Mais ma réticence est d'abord méthodologique. Quand on essaie d'expliquer un aspect de la réalité avec un modèle, il faut que ce modèle ait une solution. Dans le cas contraire il y a une contradiction entre ses hypothèses. Mais il faut que cette solution soit unique. Sinon, il est incomplet, et on ne peut pas s'en sortir de façon honnête en faisant intervenir des éléments *ad hoc* hors modèle, comme les *animal spirits* ou les *sunspots*.

Je vais maintenant donner l'exemple d'un jeu qui n'a pas d'équilibre de Nash. Sa forme normale est :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	1 -1	-1 1
	s_2	-1 1	1 -1

Chacun des deux joueurs doit dire, en même temps que son adversaire : Pile ou Face. S'ils disent la même chose, le joueur 2 paie au joueur 1 un euro. Si leurs déclarations diffèrent, le joueur 1 paie au joueur 2 un euro[3]. Ce jeu a la particularité que le gain d'un joueur est égal à la perte de son adversaire. On dit que le jeu est *à somme nulle.* Il n'y a alors aucune place pour la coopération, à la différence de ce que nous avions noté pour le dilemme du prisonnier.

Le dernier exemple est un jeu dont la forme normale est

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	10 0	5 2
	s_2	10 11	2 0

Ce jeu à deux équilibres de Nash : s_1,t_2 et s_2,t_1. On remarque que la stratégie s_2 est dominée faiblement par la stratégie s_1. Certains théoriciens des jeux proposent d'éliminer les équilibres de Nash qui comportent des stratégies faiblement dominées (sans procéder à des itérations). Cela conduit à retenir le profil s_1,t_2 et à éliminer le profil s_2,t_1 (qui hélas est l'équilibre de Nash qui domine au sens de Pareto). On dit qu'ils procèdent à un *raffinement* de l'équilibre de Nash. Il y a

[3] En fait, quand le jeu est joué, aucun des joueurs ne parle. Simplement chacun pose en même temps que son adversaire une pièce d'un euro sur la table en choisissant d'en montrer le côté face ou le côté pile. Le gagnant prend les deux pièces.

des nombreux principes de raffinement et nous en verrons plusieurs. S'ils sont convaincants et s'ils conduisent à un équilibre unique nous avons un moyen de résoudre les difficultés causées par la multiplicité des équilibres de Nash.

Kreps défend la thèse que je trouve assez convaincante qu'une solution raisonnable d'un jeu *doit être* un équilibre de Nash (mais tous les équilibres de Nash ne sont pas forcément raisonnables et il peut n'exister aucune solution raisonnable).

4. Equilibre de Nash avec stratégies mixtes

L'avant dernier exemple de la section précédente montrait qu'un jeu peut ne pas avoir d'équilibre de Nash, *si on se limite à ne considérer que des stratégies pures*. Il est possible de démontrer qu'il existe toujours un équilibre de Nash dans un jeu, si on admet que les joueurs peuvent avoir des stratégies mixtes[4]. Le jeu dont la forme normale est donnée ci-dessous n'a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure mais a un équilibre de Nash en stratégie mixte. Nous allons montrer comme le calculer.

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	3 1	1 3
	s_2	0 5	4 2

Le joueur 1 affecte aux stratégies pures s_1 et s_2 les probabilités respectives σ_1 et $1-\sigma_1$. Le joueur 2 affecte aux stratégies pures t_1 et t_2 les probabilités respectives σ_2 et $1-\sigma_2$. L'équilibre de Nash est caractérisé par les deux probabilités $\hat{\sigma}_1$ et $\hat{\sigma}_2$ qui doivent satisfaire les deux inégalités :

$$\hat{\sigma}_1[3\hat{\sigma}_2 + 1(1-\hat{\sigma}_2)] + (1-\hat{\sigma}_1)[0\hat{\sigma}_2 + 4(1-\hat{\sigma}_2)] \geq \sigma_1[3\hat{\sigma}_2 + 1(1-\hat{\sigma}_2)] + (1-\sigma_1)[0\hat{\sigma}_2 + 4(1-\hat{\sigma}_2)]$$

[4] Ce résultat est valide si l'ensemble des stratégies possibles de chaque joueur *i*, S_i, a un nombre fini d'éléments. Dans le cas où S_i est un sous-ensemble compact de R^M, où R est la droite des réels et *M* un entier naturel, le résultat d'existence demande des hypothèses complémentaires sur les ensembles S_i, et les fonctions d'utilité u_i.

$$\hat{\sigma}_2\left[1\hat{\sigma}_1+5(1-\hat{\sigma}_1)\right]+(1-\hat{\sigma}_2)\left[3\hat{\sigma}_1+2(1-\hat{\sigma}_1)\right]\geq\sigma_2\left[1\hat{\sigma}_1+5(1-\hat{\sigma}_1)\right]+(1-\sigma_2)\left[3\hat{\sigma}_1+2(1-\hat{\sigma}_1)\right]$$

pour tout $0\leq\sigma_1,\sigma_2\leq 1$.

La première inéquation montre que $\hat{\sigma}_1$ est la solution du programme $Max\sigma_1(6\hat{\sigma}_2-3)$ pour $0\leq\sigma_1\leq 1$. La solution de ce programme est : $\hat{\sigma}_1=1$ si $\hat{\sigma}_2>1/2$, $\hat{\sigma}_1=0$ si $\hat{\sigma}_2<1/2$, $\hat{\sigma}_1\in[0,1]$ si $\hat{\sigma}_2=1/2$.

La deuxième inéquation montre que $\hat{\sigma}_2$ est la solution du programme $Max\sigma_2(-5\hat{\sigma}_1+3)$ pour $0\leq\sigma_2\leq 1$. La solution de ce programme est : $\hat{\sigma}_2=1$ si $\hat{\sigma}_1<3/5$, $\hat{\sigma}_2=0$ si $\hat{\sigma}_1>3/5$, $\hat{\sigma}_2\in[0,1]$ si $\hat{\sigma}_1=3/5$.

Les deux ensembles de conditions que doit satisfaire l'équilibre de Nash sont cohérents entre eux uniquement pour $\hat{\sigma}_1=3/5$ et $\hat{\sigma}_2=1/2$. Ceci détermine le profil stratégique de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

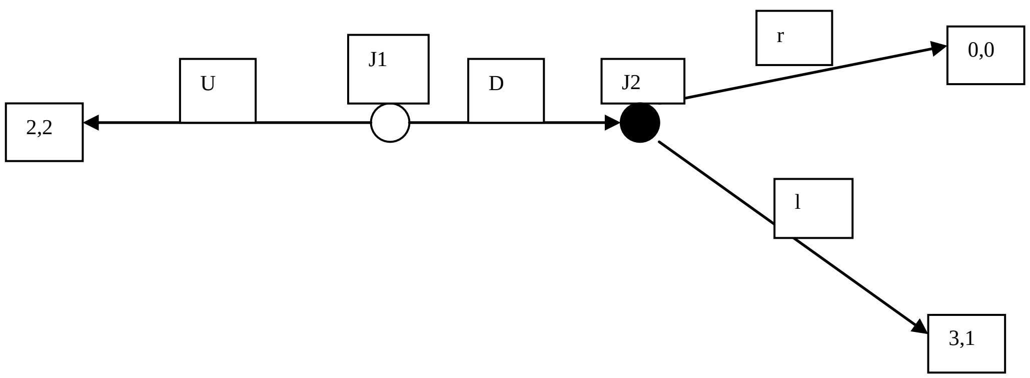
Cet équilibre permet de mettre en évidence une faiblesse du concept d'équilibre de Nash. Supposons que le joueur 1 anticipe que le joueur 2 jouera Nash, c'est-à-dire adoptera la stratégie mixte définie par la probabilité $\hat{\sigma}_2=1/2$. Ce joueur peut alors jouer Nash et adopter la stratégie mixte définie par la probabilité $\hat{\sigma}_1=3/5$. Mais il peut aussi adopter n'importe quelle autre stratégie mixte ou pure[5] (et donc ne pas jouer Nash) tout en obtenant le même gain (à condition que l'autre joueur joue Nash, comme anticipé). Donc, l'incitation pour le joueur 1 à jouer Nash manque de force (il n'est ni avantageux, ni désavantageux pour lui de jouer ainsi). Dans la définition de l'équilibre de Nash que j'ai donnée au début de la section 3 vous pouvez observer que l'inéquation comporte un $\geq$ et non pas un >. Ce choix permet de lever des difficultés mathématiques. Mais il a des conséquences conceptuelles non négligeables. Nous avions trouvé une difficulté similaire quand nous étions passé de la dominance stricte itérée à la dominance faible itérée.

5. Subgame perfection

[5] Plus précisément et généralement, jouer n'importe quelles autres stratégie mixte ou pure, construite à partir des stratégies pures ayant une probabilité strictement positive dans l'équilibre de Nash.

Le critère que je vais introduire maintenant n'est pas un critère concurrent des précédents. Il est un raffinement de l'équilibre de Nash, qui utilise astucieusement l'intuition de la *backward* induction, et permet dans certains cas de surmonter le problème de la multiplicité des équilibres de Nash. Je discuterai deux exemples de jeu, chaque fois donnés sous leur forme extensive.

Pour le premier exemple j'ai la représentation :

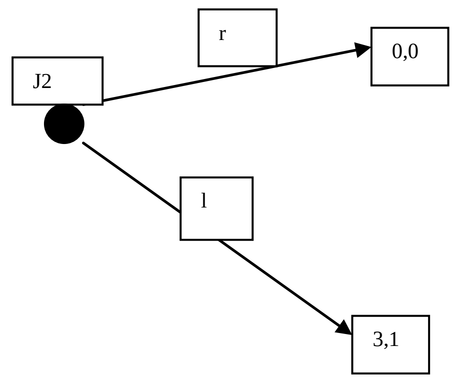


Il faut commencer par se rappeler qu'une stratégie du joueur 2 décrit les actions de ce joueur pour chaque action *possible* du joueur 1, qui joue avant le joueur 2, et non pas simplement pour l'action qu'engage *effectivement* le joueur 1. Une fois cela bien compris, il est facile de démontrer que ce jeu a deux équilibres de Nash. Pour cela il faut appliquer scrupuleusement la définition de ce concept, sans laisser son bon sens ou son intuition interférer avec sa logique. On utilisera les deux premières qualités plus tard.

- La stratégie du joueur 1 est de jouer U. La stratégie du joueur 2 est de ne rien faire si le joueur 1 joue U et de joueur r si le joueur 1 joue D. Les gains associés à cette stratégie sont 2 et 2.
- La stratégie du joueur 1 est de jouer D. La stratégie du joueur 2 est de ne rien faire si le joueur 1 joue U et de joueur l si le joueur 1 joue D. Les gains associés à cette stratégie sont 3 et 1.

Dans le premier équilibre de Nash, le joueur 2 ne joue pas r. On dit parfois que cette composante de sa stratégie est *en dehors de l'équilibre.* Je ne suis pas convaincu de la clarté de cette dénomination. Mais ce qu'il est important de noter est qu'il est important de faire figurer la composante r dans la définition de la stratégie du joueur 2. C'est à cause de cette composante, qu'anticipe parfaitement le joueur 1, que celui-ci choisira de jouer U et donc d'empêcher le joueur 2 d'exécuter la décision r.

Le jeu de l'exemple a une particularité qui est de contenir un sous-jeu dont la forme extensive est :



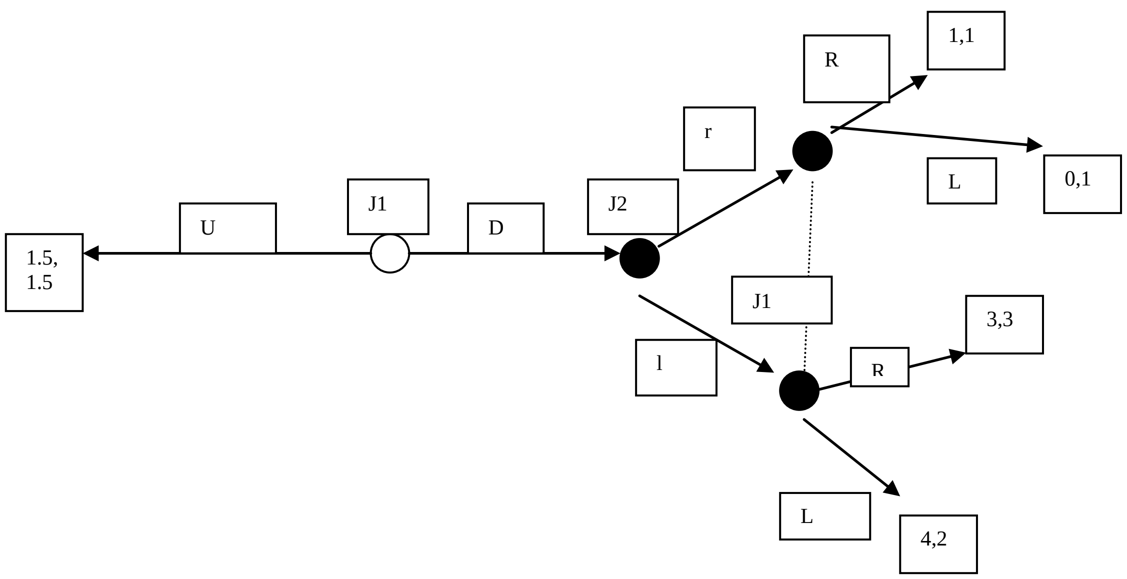
Ce sous-jeu n'est effectivement joué que si le joueur 1 joue D. Ce sous jeu a un seul équilibre de Nash qui est que le joueur 2 joue l.

Un équilibre de Nash *subgame perfect* pour un jeu écrit sous sa forme extensive, est un équilibre de Nash pour le jeu et pour tout sous jeu du jeu. Nous remarquons alors que le premier équilibre de Nash donné ci-dessus n'est pas *subgame perfect.* Mais le second équilibre de Nash est *subgame perfect.*

Dans le premier équilibre le joueur 1 a choisi de jouer U, parce qu’il anticipe que le joueur 2 jouerait r s’il jouait D. La rationalité de cette anticipation n’est pas rejetée par le concept d’équilibre de Nash. En effet, le joueur 2 peut menacer de jouer r si le joueur 1 jouait D. Cette menace n’ayant pas à être exécutée puisque le joueur 1, y réagira en jouant U, la stratégie du joueur 2 n’est pas infirmée par ses actes. Maintenant, la menace par le joueur 2 n’est pas crédible : si le joueur 1 jouait D, alors le joueur 2 préfèrera jouer l (qui lui rapporte 1) au lieu de sa menace r (qui lui rapporte 0).

Ainsi, le critère de l’équilibre de Nash inclut le concept de menace. Mais il faut le raffiner avec la *subgame perfection* pour éliminer les équilibres de Nash où la menace n’est pas crédible, c’est-à-dire les cas où si l’autre joueur ne tenait pas compte de la menace, il serait alors de l’intérêt de celui qui l’a proférée de ne pas l’exécuter parce que son exécution serait trop coûteuse pour lui-même. Enfin, n’oubliez pas que dans ce chapitre je considère des joueurs qui ne jouent qu’un nombre fini de fois. Dans le chapitre suivant, je considèrerai des jeux répétés. Alors on verra qu’un joueur peut avoir intérêt à mettre en œuvre des menaces coûteuses pour lui, afin de se construire une réputation d'inflexibilité qui lui sera bénéfique dans le long terme.

Le second exemple considère un jeu à information imparfaite, donc plus riche que le premier exemple.

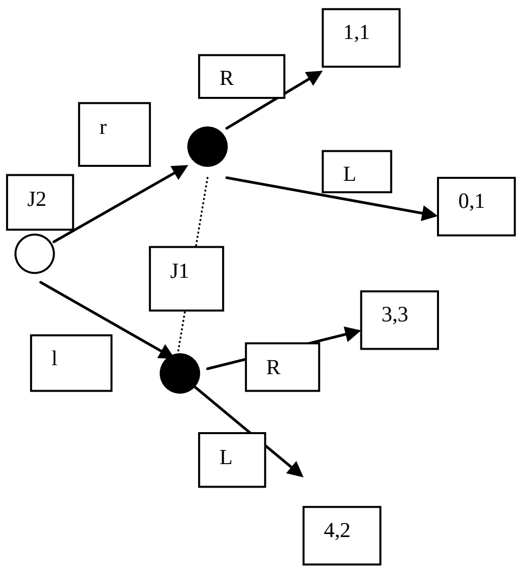


Les stratégies possibles du joueur 1 sont au nombre de 3. Soit il joue U. Soit il joue D, puis R. Soit il joue D puis L.

Les stratégies possibles du jouer 2 sont au nombre de 2. Soit il ne fait rien si le joueur 1 a joué U, et il joue r si le joueur 1 a joue D. Soit il ne fait rien si le joueur 1 a joué U, et il joue l si le joueur 1 a joue D.

Il est très facile de montrer que le profil stratégique : le joueur 1 joue U et le joueur 2 ne fait rien si le joueur 1 a joué U et joue r si le joueur 1 a joué D, est un équilibre de Nash.

Or le jeu de l'exemple a un sous-jeu dont la forme extensive est :



Il est facile de montrer que ce sous-jeu a un équilibre de Nash unique qui est le profil stratégique (L,l). Ce profil stratégique contredit l'équilibre de Nash que j'ai exhibé ci-dessus, et qui imposait au joueur 2 de jouer r dans le sous-jeu. Cet équilibre de Nash n'est donc pas *subgame perfect.*

Si, dans le jeu ci-dessus, j'avais remplacé le gain 4,2 par un gain 4,0, on aurait toujours le même équilibre de Nash dans le jeu. Il n'y aurait pas d'équilibre de Nash dans le sous-jeu. En conséquence l'équilibre de Nash du jeu ne serait toujours pas *subgame perfect.*

Considérons un jeu à information parfaite. Une propriété que démontre la théorie des jeux est que les solutions obtenues par *backward induction* sont identiques aux équilibres de Nash *subgame perfect* du jeu. Donc, le concept d'équilibre *subgame perfect* étend l'idée de *backward induction* aux jeux à information imparfaite. On peut aussi démontrer que si pour un tel jeu aucun joueur ne reçoit le même paiement à deux nœuds terminaux, tout profil stratégique restant après application du critère de dominance faible itérée, est un équilibre *subgame perfect.*

6. Rappel de la règle de Bayes

Je vais commencer par des rappels de calcul des probabilités. Un état de la nature ω est une description exhaustive d'un futur possible qui concerne un individu, par exemple moi-même. Ω est l'ensemble des états de la nature et regroupe donc tous les futurs possibles que je peux considérer. On évite des problèmes mathématiques assez techniques en considérant que le nombre d'états de la nature est fini. J'appelle événement e un sous-ensemble de Ω. O est l'ensemble des événements, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles de Ω. π est une distribution de probabilité sur O. Vous remarquerez que la probabilité n'est pas définie simplement sur les états de la nature, elle est définie sur les événements. Je dois pouvoir affecter une probabilité à chaque futur possible, mais aussi à l'éventualité de l'un ou l'autre de deux futurs possibles, etc. Vous avez appris les règles selon lesquelles on peut combiner les probabilités de différents événements.

Donnons un exemple. Avant de sortir pour travailler le matin j'envisage deux futurs possibles qui ont des implications pour moi. Ou bien la journée sera ensoleillée. Ou bien il pleuvra. Chacun de ces futurs possibles est un état de la nature et un événement. Les deux autres événements sont l'ensemble vide (il ne pleuvra pas et il ne fera pas soleil) et : il pleuvra ou il fera soleil. J'affecte à la pluie la probabilité 0.6, et au soleil la probabilité 0.4. La probabilité de l'événement ni pluie, ni soleil est 0. La probabilité de l'événement pluie ou soleil est 1.

Je vais appeler maintenant π ma distribution de probabilité *a priori.* Je dispose d'une structure d'information bruitée. Celle-ci est définie d'abord par un ensemble de signaux, exclusifs les uns des autres, que je peux observer : y_i avec $i = 1,..,I$. J'observe un des signaux. La seconde composante de la structure d'information est la probabilité conditionnelle d'observer chaque signal conditionnellement à la réalisation de chaque état de la nature $f(y/\omega)$.

Complétons l'exemple. Je possède une grenouille dans un bocal muni d'une échelle. S'il pleut durant la journée, la probabilité que la grenouille soit en haut de l'échelle le matin est 0.9. La probabilité qu'elle reste en bas est de 0.1. Ainsi la grenouille n'est pas totalement fiable et se trompe une fois sur dix. S'il fait soleil durant la journée, la probabilité que la grenouille reste en bas de l'échelle est de 0.8. Dans ce cas la grenouille se trompe une fois sur cinq. Cette absence de fiabilité de la grenouille est notée « bruité » dans ma qualification du signal.

Après avoir observé la grenouille, ou plus généralement le signal y je vais réviser ma probabilité du temps qu'il fera et j'obtiendra la probabilité *a posteriori* de ce temps $\nu(\omega / y)$. J'applique les règles des probabilités composées :

$$\nu(\omega / y) = \frac{\Pr(\omega et y)}{\Pr(y)} = \frac{\Pr(y/\omega)\Pr(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(y/\omega)\Pr(\omega)} = \frac{f(y/\omega)\pi(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega} f(y/\omega)\pi(\omega)}$$

La formule ci-dessous me permet de calculer mes probabilités *a posteriori* en fonction des probabilités *a priori* et du signal que j'ai observé et est appelée règle de Bayes. Revenons à l'exemple et supposons que la grenouille soit en haut de l'échelle. Alors, la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est de 0.6*0.9/(0.6*0.9+0.4*0.1)=0.931.

L'application de la règle de Bayes soulève un problème technique. Supposons que la probabilité qu'un signal donné sorte soit nulle pour tout état de la nature : $f(y/\omega) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$. Alors le terme de droite de l'équation ci-dessus est une division de 0 par 0. En théorie de la décision, où un joueur joue contre la Nature, cela est sans conséquence : le calcul d'une probabilité *a posteriori* conditionnelle a un signal qui n'a aucune chance de se produire, est dénué d'intérêt. Mais quand un joueur joue contre un autre joueur, il doit considérer des situations qui ne se produiront jamais, car c'est de ce qu'il décidera de faire dans ces situations que résultera un comportement de son adversaire qui impliquera que cette situation ne se produit jamais.

7. Equilibres bayésiens parfaits

Je commence par un petit rappel. Je considère un jeu avec n joueurs. Le joueur i a un choix de stratégies possibles $s_i \in S_i$ et une fonction d'utilité notée $u_i(s_1,...,s_n)$. Je note les stratégies mixtes par σ_i. Un profil stratégique est alors noté $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$. Je note par σ_{-i} le vecteur $(\sigma_1,..,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},..,\sigma_n)$. Avec un léger abus je noterai par $u_i(\sigma)$ l'utilité espérée du joueur i associée au profil stratégique précédent.

Un équilibre de Nash est un profil stratégique $\sigma^* = (\sigma_1^*,...,\sigma_n^*)$ tel que chaque σ_i^* est la meilleure réponse aux stratégies d'équilibre σ_{-i}^* des autres joueurs :

$$\forall i\text{ , } \sigma_i^* \in \arg\max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Un *équilibre de Nash* peut prescrire des stratégies qui ne sont pas des équilibres de Nash dans les sous-jeux qui ne sont pas atteints à l'équilibre. Un équilibre de Nash *subgame-perfect* est un profil stratégique qui est un équilibre de Nash pour tous les sous-jeux, y compris ceux qui ne sont pas atteints à l'équilibre.

J'introduis maintenant un jeu à information *incomplète*, qu'on appelle un *jeu Bayésien*, en complétant la description du jeu ci-dessus. Chaque joueur i appartient à un type θ_i, qui appartient à un ensemble fini Θ[6]. Son utilité $u_i(s_1,...,s_n,\theta_i)$ dépend de son type, et bien sûr il en sera de même de la stratégie $\sigma_i^*(\theta_i)$ qu'il choisira. Chaque joueur connaît son type mais ignore celui des autres joueurs. Les types des joueurs sont tirés au hasard par la Nature selon une distribution de probabilité $\pi(\theta_1,..,\theta_n)$ qui est connue de tous les joueurs[7]. Ainsi, le joueur i déduit de la distribution précédente et de la connaissance de son type la distribution de probabilité conditionnelle *a priori* des types des autres joueurs $\pi_i(\theta_{-i}/\theta_i)$, avec $\theta_{-i} = (\theta_1,..,\theta_{i-1},\theta_{i+1},..,\theta_n)$[8] et cela en appliquant la règle de Bayes.

L'équivalent dans ce nouveau contexte des équilibres de Nash et de Nash *subgame-perfect* sont appelés *équilibre Bayésien* et *équilibre Bayésien subgame-perfect.* Un profil stratégique dépendant

[6] Par exemple un candidat à un emploi peut être travailleur ou paresseux, ce qui fait deux types possibles.
[7] En ajoutant la Nature parmi les joueurs j'ai réécrit le jeu à information incomplète sous la forme d'un jeu à information imparfaite.
[8] Il est possible que la connaissance de son type par un joueur apporte une information sur la probabilité des autres joueurs d'être de tel ou tel type. On dit alors que les types des joueurs sont *corrélés*. Il est possible que cette connaissance n'apporte aucune information. On dit alors que les types des joueurs sont *non corrélés*.

du type de chaque joueur $(\sigma_1^*(\theta_1),...,\sigma_I^*(\theta_I))$ est un *équilibre Bayésien* si chaque joueur choisit la stratégie associée à cet équilibre s'il anticipe que chacun de ses adversaires choisit la stratégie associée à cet équilibre :

$\forall \theta_i, \forall i$ alors : $\sigma_i *(\theta_i) = \arg\max_{\sigma_i} \sum_{\theta_{-i}} \pi_i(\theta_{-i} / \theta_i) u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i)$.

Un *équilibre Bayésien subgame-perfect* est un équilibre dont les stratégies forment un *équilibre Bayésien* pour chaque sous-jeux du jeux.

On remarque que le joueur i doit calculer la stratégie associée à son type $\sigma_i *(\theta_i)$, mais aussi celle associée à tout autre type qu'il aurait pu avoir $\sigma_i *(\theta_j)$, $\forall \theta_j \in \Theta$ et $\theta_j \neq \theta_i$. En effet les autres joueurs ne connaissent pas le type du joueur i et prennent leurs décisions en mettant des probabilités sur la stratégie qu'aurait le joueur i pour chacun des types qu'il pourrait avoir.

Le défaut du concept *d'équilibre Bayésien subgame-perfect* est que le joueur i ne prend pas en compte le fait que les choix faits par les autres joueurs aux différentes étapes du jeu, lui donnent des informations sur les types de ces joueurs. Si le joueur i traite convenablement ces informations au fur et à mesure qu'elles arrivent, il altère sa distribution de probabilité des types des autres joueurs, au lieu de la maintenir à sa valeur *a priori*. Les distributions de probabilités que chaque joueur attribue aux types des autres joueurs et qui change au cours de la partie, sont appelées *croyances*. Le plus naturel est de considérer que chaque joueur adopte une stratégie mixte, et d'exiger que les croyances de chacun soient compatibles avec le profil stratégique de l'équilibre et avec *la règle de Bayes*. Ainsi *l'équilibre Bayésien parfait* intègre deux exigences. D'abord, les stratégies σ jouées à l'équilibre doivent former un *équilibre Bayésien subgame perfect*, compte-tenu des croyances prévalant à chaque nœud (rationalité séquentielle). Ensuite les croyances π à chaque nœud sont obtenues en révisant les probabilités *a priori* étant données les stratégies d'équilibre σ (cohérence Bayésienne).

Le problème de ce concept est que la règle de Bayes ne peut être appliquée que pour des sous-jeux qui peuvent être atteints avec une probabilité strictement positive. Les croyances hors équilibre ne sont pas contraintes dans un équilibre Bayésien parfait.

L'indétermination des croyances hors équilibre a pour conséquence que le nombre d'équilibres Bayésiens parfaits peut être considérable.

Un premier raffinement est celui *d'équilibre séquentiel.* Celui-ci impose que les croyances hors équilibre soient les limites de croyances qui sont générées par des stratégies *totalement* mixtes (chaque stratégie pure est affectée d'une probabilité strictement positive) qui sont voisines des stratégies d'équilibre. Les stratégies totalement mixtes excluent le cas de divisions de 0 par 0. Plus formellement (σ,π) est un équilibre séquentiel si les stratégies σ constituent un *équilibre subgame perfect* pour les croyances π et s'il existe une suite de stratégies totalement mixtes σ_n et une suite de croyances π_n telles que :

- π_n est déduit de σ_n par application de la *règle de Bayes* à chaque nœud du jeu.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_n,\pi_n)=(\sigma,\pi)$.

La définition n'impose pas que les stratégies σ_n constituent un *équilibre subgame perfect* pour les *croyances* π_n. Cette condition n'est imposée qu'à la limite.

On peut montrer que *l'équilibre séquentiel* raffine *l'équilibre Bayésien parfait*.

Il existe des jeux qui sont à information imparfaite, mais à information complète, dont la forme extensive ne permet d'identifier aucun sous-jeu, mais qui possèdent plusieurs équilibres de Nash dont certains semblent bizarres. Intuitivement, on se dit que ces derniers équilibres incluent des menaces non crédibles, mais l'inexistence de sous jeu ne permettent pas de les rejeter en utilisant le concept de *subgame perfection*. On peut cependant définir dans ces jeux les concepts d'équilibre Bayésien parfait et d'équilibre séquentiel, en suivant les définitions que je viens de donner. Les raffinements ainsi obtenus permettent de sauver l'intuition de la *subgame perfection* et de la nécessité pour les menaces d'être crédibles, dans un cadre plus général que celui de la section 4.

L'équilibre intuitif est un raffinement de *l'équilibre Bayésien parfait* différent du précédent et qui peut réduire considérablement le nombre d'équilibres. Considérons qu'à une étape du jeu un joueur de type θ joue la stratégie d'équilibre (Bayésien parfait) s_0. Un second joueur joue ensuite la stratégie d'équilibre $s_0^{'}$, qui dépend bien sûr de ses croyances sur le type du premier joueur. Le gain du premier joueur est $u(s_0,s_0^{'},\theta)$. Supposons que le premier joueur *dévie* et joue s au lieu de s_0. Cela va altérer les croyances que le second joueur a sur le type du premier joueur, par rapport à celles qu'il avait à l'équilibre, d'une façon qu'on ne cherchera pas à préciser. Cela conduira le second joueur à réviser sa stratégie (c'est-à-dire à en prendre une différente de $s_0^{'}$). L'utilité du premier joueur sera donc altérée à cause de sa déviation *et* à cause du changement de stratégie de l'autre joueur. Un équilibre Bayésien parfait ne sera pas intuitif si une déviation du joueur 1 conduit le joueur 2 à réviser ses croyances de telle façon que le gain du joueur 1 augmente.

Je réalise que la fin de cette section devient difficile à comprendre. Les choses s'illumineront quand je présenterai le modèle de signal de Spence dans le chapitre consacré à l'antisélection.

8. Perfection de la main tremblante

je vais introduire un dernier raffinement de l'équilibre de Nash, qui repose sur un principe très différents de ceux que nous avons vu jusqu'à présent. Je considère le jeu sous forme normale :

		Joueur 2	
		t_1	t_2
Joueur 1	s_1	10 0	5 2
	s_2	10 1	2 0

Le profil stratégique s_2, t_1 est un équilibre de Nash. Cependant, la stratégie s_2 du joueur 1 est dominée faiblement par la stratégie s_1 de ce joueur. Nous avions vu que certains experts de la théorie des jeux estimaient que cela suffisait pour rejeter cet équilibre de Nash. Dans cette section je vais rejeter cet équilibre, mais en utilisant un argument très différent de la dominance faible.

Si le joueur 1 anticipe que le joueur 2 va jouer t_1, la stratégie s_2 est pour lui aussi bonne que la stratégie s_1, et c'est pour cela que s_2, t_1 est un équilibre de Nash. Mais, si le joueur 1 anticipe que le joueur 2 *a l'intention* de jouer t_1, mais qu'il peut se tromper (sa main tremble) et jouer par erreur t_2 avec une petite probabilité. Alors le joueur 1 préfèrera jouer s_1. L'équilibre de Nash considéré est alors rejeté.

Dans un jeu à I joueurs, un profil stratégique qui est un équilibre de Nash, est parfait de la main tremblante si aucun joueur ne change sa stratégie si la stratégie de chacun de ses partenaires est légèrement modifiée en une stratégie strictement mixte.

Si on admet que les joueurs peuvent adopter des stratégies mixtes, on peut montrer qu'il existe toujours (au moins) un équilibre de Nash parfait de la main tremblante dans un jeu (fini).

Le problème que pose ce nouveau raffinement de l'équilibre de Nash est comment il se situe par rapport aux raffinements que nous avions considérés antérieurement ? On peut montrer que ce raffinement exclut les stratégies faiblement dominées, mais pas toutes les stratégies qui seraient exclues par le critère de la dominance faible itérée. On peut montrer également que ce raffinement n'implique pas la *subgame perfection.* Cependant, la définition mathématique précise d'un équilibre parfait de la main tremblante soulève quelques difficultés techniques qui conduisent à certaines ambiguïtés et donc à plusieurs définitions différentes, mais reflétant toutes l'idée centrale de cette section. Pour une de ces définitions, le critère de la main tremblante implique la *subgame perfection* et de plus, les *équilibre séquentiels* coïncident avec les équilibres *parfaits de la main tremblante* dans presque tous les jeux finis.

9. Applications à la théorie des enchères

Un vendeur va offrir un objet d'art aux enchères. Il a deux acheteurs potentiels (que nous appellerons les joueurs). La valeur de l'objet (son prix de réservation) pour le joueur i est v_i. Cette valeur est connue du joueur i, mais ne l'est pas de son concurrent, ni du vendeur. Le vendeur a le choix entre les deux modalités d'enchères que nous allons examiner. Pour chacune d'entre elles chaque l'acheteur i soumet une offre b_i dans une enveloppe scellée. Le vendeur ouvre les deux enveloppes et examine les offres.

9.1. Critère de dominance faible et enchère au second prix

Dans cette enchère, l'objet est attribué à l'acheteur qui a soumis l'offre la plus élevée. Mais le prix qu'il aura à payer sera celui de la seconde offre la plus généreuse, qui dans ce cas où il n'y a que deux acheteurs est l'offre de son concurrent. Si les deux offres sont du même montant, le bénéficiaire de l'objet sera tiré au sort et il paiera le prix commun à ces deux offres.

Définissons le jeu. Une stratégie du joueur i est le choix de son offre b_i. Son gain est alors

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_j & si : b_i > b_j \\ (v_i - b_j)/2 & si : b_i = b_j \\ 0 & si : b_i < b_j \end{cases}$$

Nous allons démontrer que la stratégie $b_i = v_i$, c'est-à-dire faire une offre égale à son prix de réservation (ne pas mentir), domine faiblement toutes les autres stratégies du joueur i.

Supposons pour commencer que le joueur i joue la stratégie alternative $b_i^{'} < v_i$. Alors :

- Si le joueur j joue $b_j < b_i^{'}$, alors, la stratégie alternative comme la stratégie de dire la vérité procurent le même gain positif $v_i - b_j$ au joueur i.
- Si le joueur j joue $b_j \geq v_i$, alors, la stratégie alternative comme la stratégie de dire la vérité procurent un gain nul au joueur i.
- Si le joueur j joue b_j, avec $b_i^{'} < b_j < v_i$, alors la stratégie alternative procure un gain nul au joueur i, alors que la stratégie de dire la vérité lui procure le gain positif $v_i - b_j$.
- Si le joueur j joue $b_j = b_i^{'}$, alors, la stratégie alternative procure le gain positif $(v_i - b_j)/2$ au joueur i, alors que la stratégie originale lui procure le gain double $v_i - b_j$.

Supposons ensuite que le joueur i joue la stratégie alternative $b_i^{'} > v_i$. Alors cette nouvelle et l'ancienne stratégies lui procurent le même gain, sauf si le joueur j joue b_j, avec $b_i^{'} > b_j > v_i$, où l'ancienne stratégie donne un gain nul et la nouvelle stratégie un gain négatif $v_i - b_j$.

Intuitivement, en faisant une offre supérieure à son prix de réservation, on risque de payer pour l'objet un prix supérieur à ce prix. Mais en faisant une offre inférieure à son prix de réservation, on court le risque de manquer l'occasion d'acquérir l'objet pour un prix intermédiaire entre son offre et son prix de réservation.

9.2. Equilibre bayesien et enchère au premier prix

Dans cette enchère, l'objet est attribué à l'acheteur qui a soumis l'offre la plus élevée, et le prix qu'il aura à payer sera celui qu'il a proposé. Si les deux offres sont du même montant, le bénéficiaire de l'objet sera tiré au sort et il paiera le prix commun à ces deux offres.

Le gain du joueur i est

$$u_i(b_1,b_2;v_1,v_2)= \begin{array}{cc} v_i-b_i & si: b_i > b_j \\ (v_i-b_i)/2 & si: b_i = b_j \\ 0 & si: b_i < b_j \end{array}$$

Nous allons maintenant être plus précis sur la distribution de probabilité des valeurs de l'objet pour les deux joueurs, $f(v_1,v_2)$.

- D'abord nous supposons que $0 \le v_1, v_2 < 1$.
- Ensuite nous supposons que v_1 et v_2 sont des variables aléatoires indépendantes. Cela signifie que la connaissance de l'appréciation que porte un joueur sur la valeur de l'objet d'art n'apporte aucune information sur l'appréciation qu'apporte son concurrent. Cette hypothèse est très forte (et souvent irréaliste, notamment quand il s'agit d'un objet d'art). Alors, la distribution de probabilité de ces valeurs se décompose : $f(v_1,v_2)=g(v_1)h(v_2)$. Ainsi, le joueur 1 qui connaît v_1 affecte à v_2 la distribution de probabilité $h(v_2)$, et symétriquement pour le joueur 2.
- Finalement on suppose que $g(v_1)$ et $h(v_2)$ sont des distributions uniformes sur $[0,1]$.

L'espérance de gain du joueur i, s'il choisit de faire l'offre b_i, est $(v_i-b_i)\Pr ob(b_i > b_j)$ (nous avons utilisé le fait que $\Pr ob(b_i = b_j)=0$.

Le calcul de (des) équilibre(s) bayesien(s) de ce jeu est délicat. En fait je vais exhiber un équilibre, sans prouver qu'il n'en existe pas d'autres. Dans cet équilibre, les offres de chaque joueur seront fonctions de leurs prix de réservation : $b_i = F_i(v_i)$, $i=1,2$. Nous allons rechercher un équilibre symétrique où les deux fonctions F sont les mêmes. Puis nous allons limiter notre recherche au cas où cette fonction est affine croissante : $F(v)=a+cv$, avec $c \ge 0$.

Alors l'espérance de gain du joueur i s'il choisit de faire l'offre b_i est $(v_i - b_i)\Pr ob(b_i > a + cv_j) = (v_i - b_i)\Pr ob\left(v_j < \frac{b_i - a}{c}\right)$.

Le joueur i va choisir de faire l'offre b_i qui maximise cette espérance de gain. Nous allons chercher les conditions pour que cette offre vérifie $b_i = a + cv_i$. Sous cette dernière condition nous devons avoir $(b_i - a)/c = v_i \leq 1$, et donc $\Pr ob\left(v_j < \frac{b_i - a}{c}\right) = \frac{b_i - a}{c}$.

L'offre b_i du joueur i maximise son espérance de gain, qui est $(v_i - b_i)(b_i - a)/c$. On en déduit que $b_i = (v_i + a)/2$.

Finalement on veut que $b_i = (v_i + a)/2 \equiv a + cv_i, \forall v_i$. On déduit de cette condition : $a = 0$ et $c = 1/2$.

En conclusion les offres des joueurs sont égales à la moitié de leurs prix de réservation : $b_i = v_i / 2$, pour $i = 1,2$.

9.3. Comparaison des deux enchères du point de vue du vendeur

Le vendeur choisit l'enchère qui lui apporte l'espérance de gain la plus élevée, compte tenu de son ignorance des prix de réservation des deux acheteurs (il sait simplement que ces deux prix sont indépendants entre eux et uniformément distribués sur $[0,1]$).

Avec l'enchère au second prix, l'espérance de gain du vendeur est $EMin(v_1, v_2)$. Avec l'enchère au premier prix cette espérance de gain est $\frac{EMax(v_1, v_2)}{2}$. On montre aisément que ces deux espérances de gain sont égales à 1/3. Ainsi, le vendeur est indifférent entre les deux types d'enchères.

Un point subtil de l'enchère au second prix est que pour obtenir que l'acheteur ne mente pas dans son offre, le vendeur doit lui attribuer un prix indépendant et plus bas que cette offre.