Chapitre 1
Introduction à la théorie des jeux

Il sera plus pédagogique d'introduire les principaux concepts de base intervenant dans la définition et la représentation d'un jeu en recourant à un exemple, plutôt qu'en donnant des définitions abstraites.

1. Forme extensive d'un jeu

1.1. L'exemple

Joks est une entreprise fabriquant des jeux de société. Elle envisage de lancer un nouveau jeu intitulé « Oligopole ». Si elle introduit ce jeu sur le marché, elle aura à supporter un coût fixe de 40 000 dollars et chaque unité fabriquée lui coûtera en plus 5 dollars. Le marché pour ce jeu aura une taille inconnue. Plus précisément, Joks estime que ce marché pourra se révéler être de grande taille, avec une demande de 20 000 unités, ou de petite taille, avec une demande de 6 000 unités. Il affecte à la première éventualité une probabilité de 0.4, et à la seconde une probabilité de 0.6. Dans les deux éventualités, Joks vendra son jeu 12 dollars l'unité.

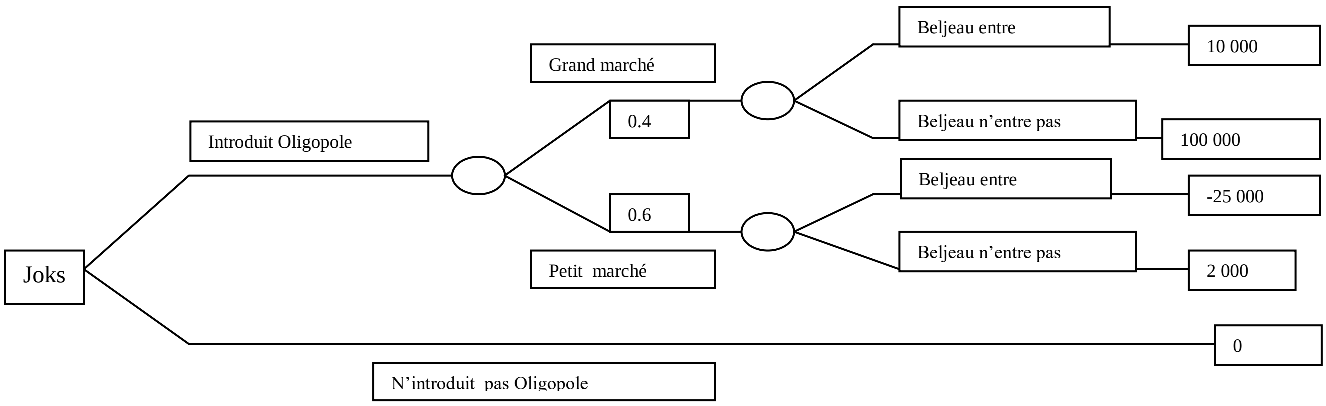
Une autre firme, Beljeau, envisage au même instant d'introduire sur le marché un jeu concurrent, appelé « Reaganomics ». Si Beljeau et Joks introduisent simultanément leurs jeux, ils se partageront le marché en parts égales (c'est-à-dire ils vendront 10 000 ou 3 000 unités de leur jeu chacun). De plus ils ne pourront alors vendre leurs jeux qu'au prix de 10 dollars l'unité.

Beljeau a commandé une étude de marché, qui lui dira avant sa prise de décision si le marché sera grand ou petit. Son coût fixe de production est de 60 000 dollars. Son coût de production unitaire est de 3 dollars. Si Joks n'introduit pas « Oligopole », alors Beljeau pourra vendre « Reaganomics à 12 dollars l'unité.

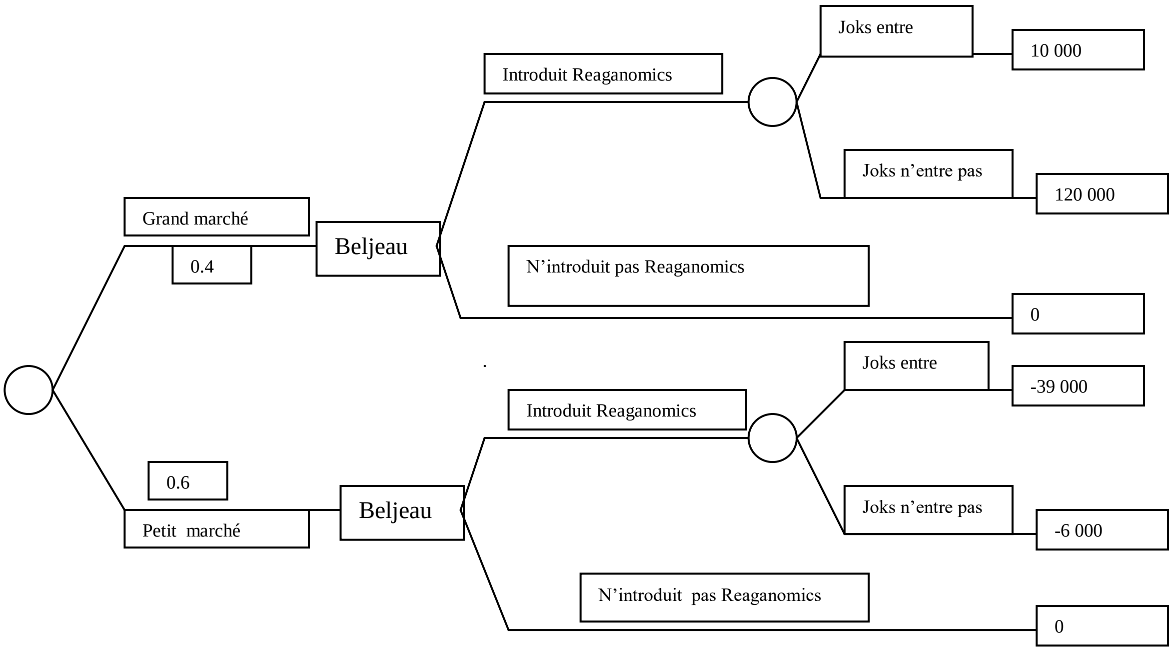
Dans un souci de simplification, cet exemple fait des hypothèses irréalistes. Par exemple, il n'y a aucun lien entre le prix de vente et le volume des ventes. De plus la nature de la concurrence entre les deux firmes, une fois les deux jeux introduits sur le marché, n'est pas claire. Mais, en dépit de ces simplifications, l'énoncé de l'exemple est assez complexe, et il est malaisé de l'intérioriser rapidement. Nous allons donc commencer par donner une représentation graphique du jeu, en nous inspirant des arbres de décision auxquels on recourt en théorie de la décision.

1.2. Arbres de décision

Nous représentons d'abord *l'arbre de décision* de Joks. Un rectangle avec le nom de Joks à l'intérieur identifie un nœud où Joks doit prendre une décision. Cette décision est le choix de l'une ou l'autre des branches démarrant à ce rectangle. Un cercle identifie un nœud où la nature (le hasard) choisit la branche le long de laquelle l'état du monde continuera à progresser. Le premier type de nœud est appelé *nœud de décision*. Le second est appelé *nœud de chance.* A la fin de chaque branche de l'arbre de décision, nous écrivons le gain de Joks. Celui-ci est facile à calculer. Si Joks n'introduit pas son jeu sur le marché, son gain est nul. S'il l'introduit, il subit un coût fixe de 40 000 dollars. Il gagne le produit de ces ventes mais subit aussi un coût variable, qui sont fonction de la taille du marché et de la décision de Beljeau.



Nous représentons ensuite l'arbre de décision de Beljeau, en adoptant les mêmes conventions.



Ces deux arbres de décision donnent une représentation du jeu beaucoup plus claire que l'énoncé littéral du paragraphe précédent. Si on a un peu d'imagination, on peut même résoudre le jeu, c'est-à-dire déterminer les décisions prises par chacune des deux entreprises et le gain qu'elles réalisent, sans connaître quoi que ce soit à la théorie des jeux et aux concepts d'équilibre non coopératif qu'elle utilise.

1. Plaçons d'abord du point de vue de Beljeau, ou si vous préférez dans la tête de son manager. Beljeau, prend sa décision après avoir lu le résultat de l'étude de marketing. Il sait donc si le marché sera de grande taille ou de petite taille. Si le marché est de grande taille, il aura un profit positif s'il introduit le jeu, et cela quelle que soit la décision prise par Joks (ce profit sera de 10 000 ou 120 000). Aussi, il introduira le jeu. Si le marché est petit, il sait qu'il perdra de l'argent s'il introduit le jeu, et cela quelle que soit la décision de Beljeau (sa perte sera de 6 000 ou 39 000). Aussi, il n'introduira pas le jeu.
2. Joks est capable d'imaginer le raisonnement précédent de son concurrent, ou si vous préférez son manager peut se mettre dans la tête du manager de Beljeau. Ainsi, il sait que si le marché est grand, Beljeau lancera son jeu, mais que si le marché est petit, il ne lancera pas son jeu. Ainsi, il sait que s'il introduit son jeu « Oligopole » sur le marché, alors, il gagnera un profit positif (10 000 ou 2 000). En conséquence il décide d'introduire son jeu.

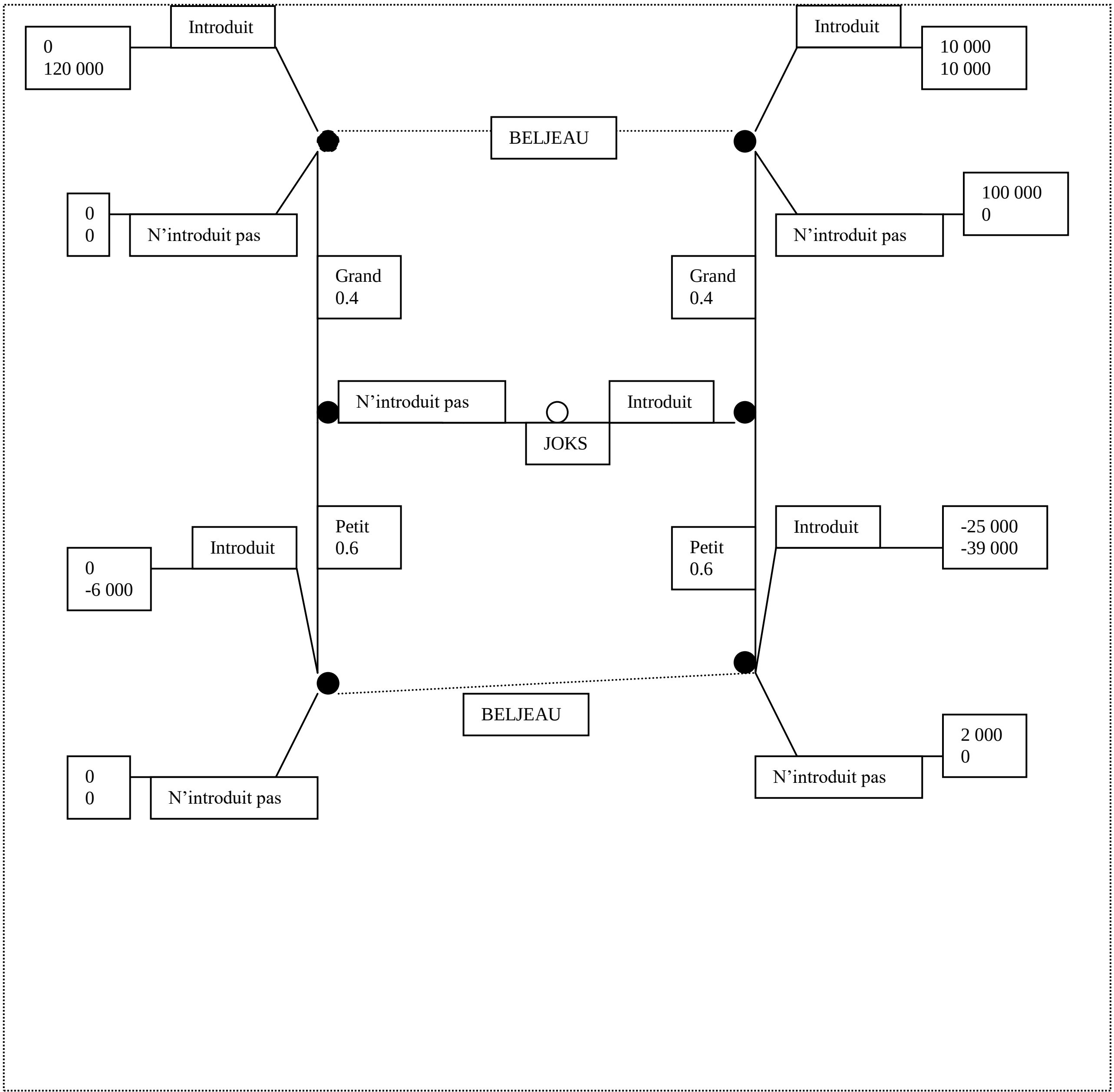
3. Beljeau est capable d'imaginer le raisonnement précédent de son concurrent, c'est-à-dire de se mettre dans la tête du manager de Joks, en sachant que ce manager a raisonné en se mettant déjà dans la tête du manager de Beljeau. Il sait donc que Joks entrera sur le marché.
4. En conséquence l'équilibre du jeu est que Joks entre sur le marché. Beljeau, entre sur le marché si celui-ci est de grande taille et n'entre pas s'il est de petite taille. Si le marché est de grande taille, Joks gagne 10 000 et Beljeau gagne 10 000. Si le marché est de petite taille, Joks gagne 2 000 et Beljeau gagne 0.

La grande différence avec la théorie de la décision est que celle-ci considère les choix d'un agent unique face à une nature qui agit de façon parfaitement aléatoire. Dans l'exemple, Joks est confronté en plus à un concurrent, qui lui n'agit pas de façon aléatoire. Aussi, par pure introspection, il essaie d'imaginer les décisions que prendra son concurrent en prenant en compte le fait que ce concurrent essaie lui aussi d'imaginer les décisions de son adversaire. C'est cette dimension *stratégique* qui est l'originalité de la théorie des jeux.

La description graphique du jeu a nécessité le tracé de deux arbres de décision. La détermination de l'équilibre du jeu a nécessité une succession de passages d'un arbre de décision à l'autre. Il est alors naturel de souhaiter croiser les deux arbres de décision de façon à obtenir un graphique unique. C'est ce qu'on appelle la *forme extensive du jeu.*

1.3. Représentation de la forme extensive

Dans cette représentation on ne distingue plus les nœuds de chance (où la nature effectue un tirage aléatoire) des nœuds de décision (où un joueur choisit). Tous ces nœuds sont représentes par un cercle noir. Simplement, pour indiquer où débute le jeu, le premier nœud est représenté par un cercle blanc. Comme pour les arbres de décision, il y a le plus souvent, plusieurs représentations possibles de la forme extensive.

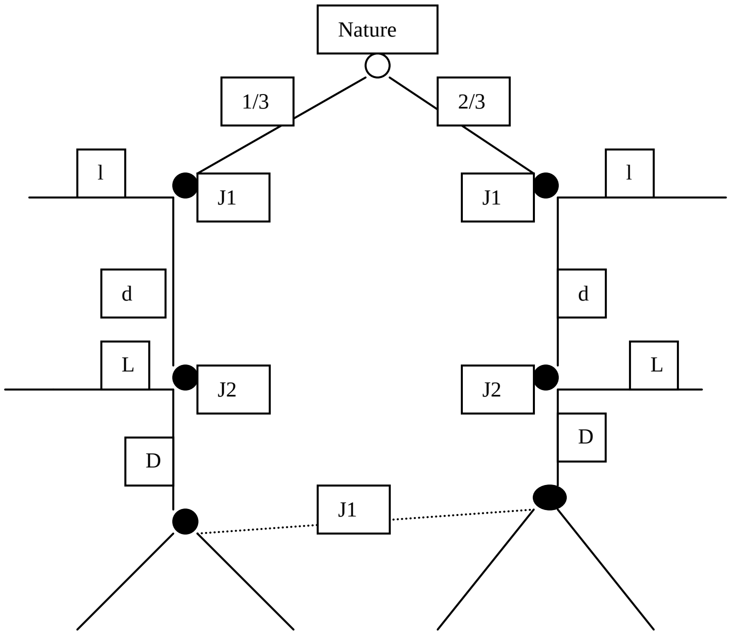


La grande nouveauté apparaissant dans le graphique de la forme extensive concerne les lignes en pointillés. Examinons la ligne en pointillé supérieure. Elle relie deux noeuds de décision concernant Beljeau. Ces nœuds représentent des situations (historiques ou objectives si vous voulez) différentes. Dans celui de gauche, le marché est grand et Joks n’introduit pas

« Oligopole » sur le marché. Dans le nœud de droite, le marché est grand et Joks introduit « Oligopole » sur le marché. Mais Beljeau a une information *imparfaite,* qui ne lui permet pas de distinguer à partir de quel nœud de décision il prendra sa décision. Certes, son étude de marketing lui aura appris que le marché est grand, et donc qu'il prendra sa décision d'introduire ou non sur le marché le jeu « Reagonomics » en sachant qu'il n'est pas dans un des deux nœuds de décision situés en bas du graphique. Mais Beljeau ne connaît pas la décision de Joks (même s'il essaiera de la deviner par le calcul introspectif que nous avons présenté plus haut). L'ignorance de Beljeau provient de ce que Joks prend sa décision en même temps que Beljeau. Dans d'autres jeux l'ignorance d'un joueur proviendra de son impossibilité d'observer certains éléments de l'histoire (certaines actions passées de ses concurrents) ou de son oubli de l'histoire comme on le verra dans l'exemple suivant.

Chaque ligne en pointillé représente un *ensemble d'information*. A tous les nœuds d'un ensemble d'information est associée la même décision.

Nous ferons le plus souvent dans ce cours l'hypothèse de *mémoire parfaite* (*perfect recall*) : un joueur se rappelle à chaque étape du jeu ce qu'il a fait antérieurement et ce qu'il savait antérieurement. Ainsi, une partie de bridge à laquelle je participe ne satisfait pas cette hypothèse (mais mon partenaire m'expliquera qu'une partie de bridge avec son partenaire habituel et des adversaires fréquentables satisfait à cette hypothèse). Dans l'exemple ci-dessous, le joueur 1 (J1) oublie au bout de quelques temps, ce qu'avait choisi la nature au début du jeu.



2. *Forme stratégique ou normale d'un jeu*

Un joueur prend une décision pour chaque ensemble d'information le concernant. La liste dont l'élément constitutif est la décision prise pour chacun de ces ensembles d'information est une *stratégie* du joueur. Ainsi j'ai la définition : Une stratégie d'un joueur est un plan contingent complet déterminant l'action qu'il prendra à chaque ensemble d'information qui le concerne (y compris les ensembles d'informations qu'il n'atteindra pas en conséquence de cette stratégie).

Ce concept est difficile et il existe des exercices particulièrement vicieux, où l'étudiant trop rapide se trompe totalement. Je vais essayer d'en faire sentir la subtilité par des considérations qui n'ont pas d'autre ambition que d'être pédagogique. Avant le premier choc pétrolier, la planification dynamique était devenue populaire auprès des entreprises. Celles-ci établissaient des plans à cinq ans, avec les décisions qu'elle avait décidé de prendre chacune de ces cinq années. Il s'agissait donc pour elles de résoudre un problème de programmation dynamique où elles recherchaient une cohérence temporelle dans leurs décisions (par exemple ne pas construire une usine fabriquant un nouveau produit avant de disposer d'un circuit de commercialisation convenable de ce produit).

Le côté aberrant de cette forme de planification est que le futur est incertain, et cela d'autant plus qu'il est lointain. Aussi, un stade supérieur de planification est de considérer que chaque année l'environnement de l'entreprise peut être dans différents états de la nature probabilisables. Supposons que cet environnement puisse être favorable ou défavorable. Alors, la première année, il existe deux états de la nature possibles (favorable ou défavorable). La seconde année il existe quatre états de la nature possibles (favorables les deux années, favorable la première année et défavorable la seconde année, défavorable la première année et favorable la deuxième année, défavorable les deux années). La cinquième année il existe trente deux états de la nature possible. Cette imbrication d'états de la nature doit vous rappeler le concept de filtration dont on vous a parlé en finances. Une stratégie (à opposer à un plan) dira ce que l'entreprise fera chaque année pour chacun des trente deux états de la nature. Ou si vous préférez une stratégie regroupera trente deux plans, chacun relatif a un des trente deux scénarios possibles de l'environnement. Si vous trouvez que cela fait beaucoup, pensez aux astuces utilisées en finances (et plus généralement en analyse des systèmes) pour surmonter cette complication en recourant à des variables d'état, des processus markoviens, etc.

En théorie des jeux, la complication est que la stratégie doit être aussi contingente à chacune des actions possibles des concurrents. Le point délicat est qu'il s'agit de toutes les actions possibles, et non pas seulement de celles qu'il pourrait être avantageux pour lui de mener. Ou si vous préférez, un état de la nature à laquelle vous associez une probabilité nulle peut être simplement éliminé. Mais une décision possible d'un concurrent qu'il n'a aucune « chance » de prendre, doit être prise en compte dans votre stratégie, parce que si le concurrent ne prend pas cette décision, c'est peut-être à cause de la décision qu'il imagine que vous prendriez à la suite de son action. Dans une stratégie, il faut prévoir des réponses aux questions qui, vous savez, ne vous seront jamais posés, parce que c'est à cause de ces réponses que ces questions ne vous seront jamais posées. C'est la grande différence entre la théorie de la décision (les décisions de la nature sont purement aléatoires) et la théorie des jeux (les décisions de votre adversaires sont endogènes et fonctions des réactions qu'il vous attribue).

Concluons ces considérations par un exemple un peu bête mais que j'espère éclairant. Vous savez que je ne vous demanderai jamais de rattraper un cours qu'il m'ennuierait de donner par un autre cours situé le dimanche matin. Il s'agit donc d'un événement de probabilité nulle. Mais, vous avez quand même réfléchi à la réaction assez désagréable que vous auriez si je vous demandais de remplacer le cours auquel je n'ai pas voulu aller parce qu'il y avait un film rarement projeté au Studio Action au même moment, par un cours situé le dimanche matin. Et c'est parce que j'ai prévu cette réaction que je ne vous ferai jamais cette demande. Donc, la nullité de la probabilité de ma demande est endogène, et c'est pour cela que vous ne pouvez pas ignorer cette demande improbable, alors que vous pouvez ignorer les états de la nature de probabilité nulle.

Continuons en décrivant les stratégies possibles (l'ensemble des stratégies) de Joks et de Beljeau. Joks a deux stratégies possibles.

- s_1 Introduire « Oligopole » sur le marché.
- s_2 Ne pas introduire « Oligopole » sur le marché.

Pour Beljeau les choses sont un peu plus subtiles. Beljeau a quatre stratégies possibles.

- t_1 Indépendamment des résultats de l'étude de marché, introduire « Reaganomics » sur le marché.
- t_2 Si l'étude de marché conclut que le marché sera grand, introduire « Reaganomics » ; Si l'étude de marché conclut que le marché sera petit, ne pas introduire « Reaganomics ».
- t_3 Si l'étude de marché conclut que le marché sera petit, introduire « Reaganomics » ; Si l'étude de marché conclut que le marché sera grand, ne pas introduire « Reaganomics ».
- t_4 Indépendamment des résultats de l'étude de marché, ne pas introduire « Reaganomics » sur le marché.

Ce que gagnera Joks s'il choisit la stratégie s_1 alors que Beljeau choisit la stratégie t_1, dépendra encore du choix que fera la nature. Si le marché est grand Joks gagnera 10 000 dollars, si le marché est petit il gagnera -25 000 dollars. Ces deux éventualités ont les probabilités 0.4 et 0.6. Nous supposerons que les joueurs sont neutres à l'égard du risque. Ainsi, le résultat de cette combinaison de stratégies pour Joks, sera mesuré par son gain espéré, soit -11 000 dollars.

On peut ainsi représenter le jeu, de façon plus compacte qu'auparavant, par les listes des stratégies possibles de chaque joueur, et par les espérances de gain attachées à chaque combinaison de stratégies des deux joueurs. C'est ce qu'on appelle la *forme stratégique ou normale* du jeu, qu'on peut représenter par un tableau rectangulaire.

		BELJEAU			
		t_1	t_2	t_3	t_4
JOKS	s_1	-11000 -19400	5200 4000	35000 -23400	41200 0
	s_2	0 44400	0 48000	0 -3600	0 0

L'ensemble des stratégies suivies par l'ensemble des joueurs, par exemple (s_1, t_1) est appelé un *profil stratégique.*

A chaque forme extensive d'un jeu on peut associer une forme normale unique, mais à une forme normale on peut en général associer plus qu'une forme extensive. La forme normale d'un jeu est une forme condensée de la forme extensive.

Les théoriciens des jeux appellent les stratégies que j'ai considérées jusqu'à présent, par exemple s_1 ou s_2 des *stratégies pures*. A partir de celles-ci ils introduisent une extension les *stratégies mixtes*. Selon celles-ci, Joks n'aura pas à choisir entre mettre en œuvre la stratégie s_1 ou la stratégie s_2. Il pourra plus généralement choisir une distribution de probabilité sur ses deux stratégies, par exemple son choix pourra être d'attribuer une probabilité de ¼ à s_1 et de ¾ à s_2, et ensuite il laissera le hasard décider la stratégie pure qu'il mettra en œuvre.

Cette extension ancienne des stratégies pures aux stratégies mixtes, m'a toujours laissé songeur. Son avantage est mathématique : il est plus simple d'obtenir des résultats théoriques clairs et élégants, par exemple sur l'existence ou l'unicité de l'équilibre d'un jeu, avec le concept de stratégie mixte qu'avec celui de stratégie pure. Il est aussi plus facile de calculer numériquement l'équilibre d'un jeu (par un programme informatique) pour des stratégies mixtes. Maintenant, je n'ai jamais vu de cas où un décideur du monde réel tirait ses décisions aux dés (même s'il a la possibilité de choisir les probabilités des différentes options entre lesquelles il effectuerait son tirage). Les manuels de théorie des jeux contiennent quelques résultats mathématiques et des développements littéraires expliquant qu'en fait les décideurs se comportent souvent *comme* s'ils tiraient aux dés. J'ai trouvé ces argumentations tirées par les cheveux et peu convaincantes.

En fait, un des problèmes de la théorie des jeux est qu'elle s'est souvent développée à un niveau mathématique, sans références aux situations économiques, sociales, militaires, de dynamique de groupe, etc où elle trouvait son application. Nous verrons dans le chapitre suivant que beaucoup de paradoxes de la théorie des jeux sont artificiels et proviennent de problèmes réels mal ou incorrectement posés.

Notamment, nous verrons dans la seconde partie du cours, qu'un joueur n'a pas à choisir le plus souvent entre deux options, mais entre un continuum de possibilités. Par exemple une entreprise choisit son prix de vente, dans un environnement concurrentiel et ce prix est un nombre réel. Ainsi, la difficulté mathématique créée par le caractère discret du choix ne se pose pas. Mais il existe quand même des choix discrets, par exemple entrer ou non sur un marché. Alors, on ne peut pas éluder cette difficulté, par une astuce mathématique, comme l'introduction de stratégies mixtes.

Nous allons quand même décrire la formalisation des stratégies mixtes, puisqu'on les rencontre fréquemment dans les livres de théorie des jeux (et peu fréquemment dans les livres appliquant la théorie des jeux). Joks va attribuer les probabilités $\sigma_J(s_1)$ et $\sigma_J(s_2)$ aux stratégies pures s_1 et s_2. Nous avons bien sûr $\sigma_J(s_1)+\sigma_J(s_2)=1$. Beljeau attribue les probabilités $\sigma_B(t_1)$, $\sigma_B(t_2)$, $\sigma_B(t_3)$ et $\sigma_B(t_4)$ aux stratégies t_1, t_2, t_3 et t_4. On peut représenter les stratégies mixtes des deux joueurs par les deux vecteurs

$\sigma_J = \begin{pmatrix} \sigma_J(s_1) \\ \sigma_J(s_2) \end{pmatrix}$ et $\sigma_B = \begin{pmatrix} \sigma_B(t_1) \\ \sigma_B(t_2) \\ \sigma_B(t_3) \\ \sigma_B(t_4) \end{pmatrix}$. Le profil stratégique peut alors être noté : $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_J & \sigma_B \end{pmatrix}$.

Il est possible de démontrer le théorème de Kunh, qui établit que l'introduction de stratégies mixtes dans la forme normale ou stratégique d'un jeu, équivaut à l'introduction de la possibilité de tirages au sort, avec des probabilités adéquates, entre actions possibles de chaque joueur à chaque ensemble d'information le concernant dans la forme extensive du jeu, *quand le jeu est à mémoire parfaite*.

PS. Au cours de ma vie je n'ai trouvé qu'un seul cas de stratégie mixte, qui fait l'objet de l'excellent roman de Luke Rhinehart, *The dice man*. Le héro du roman est un psychanalyste new yorkais, qui réalise un jour que tout ce qu'il a réussi de mieux a été de transformer des patients ayant une vie insignifiante et révoltés en patients ayant une vie insignifiante mais résignés. Il conclut donc qu'il doit transformer la vie de ses patients en la rendant intéressante et il invente la *dice therapy*. La première expérience, qu'il essaie sur lui-même, est de mettre une probabilité sur une *fantasy* qu'il n'avait jamais imaginé oser réaliser, et de laisser les dés décider. Le livre est délicieusement immoral et politiquement incorrect. Et pourtant, il ne dépasse pas la théorie de la décision, avec un décideur *risk lover* (encore que je ne sois pas certain que le critère d'espérance mathématique d'utilité rende bien compte de la *dice therapy*). Il me semble que si l'auteur avait connu la théorie des jeux et les stratégies mixtes, il aurait pu écrire un livre encore pire (d'autant plus que son héro s'associe avec une collègue dans ses recherches pour sa nouvelle thérapie, puis crée une association de psychanalyste adoptant cette nouvelle approche, toutes actions se prêtant à la théorie des jeux).

.